PCSI 1

Exercices du chapitre 3 : Arithmétique

2024/2025

I Division d'entiers

Exercice 1 : ($\star$)
On divise deux entiers a et b, tels que $a > b$, par leur différence $a-b$. Comparer les quotients et les restes obtenus.

II pgcd

Exercice 2 :
Déterminer les $n \in \mathbb{N}^*$ tels que si on divise 4373 et 826 par n, on obtient respectivement 8 et 7 pour restes.

Exercice 3 :
Déterminer les $n \in \mathbb{N}^*$ tels que si on divise 6381 et 3954 par n, on obtient respectivement 9 et 6 pour restes.

Exercice 4 :
Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer :

$$\text{pgcd}\,(mn, (2m+1)n).$$

Exercice 5 : ($\star$)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose :

$$a = n^2 + 3n \text{ et } b = n^2 + 5n + 6.$$

1. Déterminer $\text{pgcd}\,(n, n+2)$.
2. Déterminer $\text{pgcd}\,(a, b)$.

III ppcm

Exercice 6 : ($\star\star$)
Déterminer les entiers naturels non nuls a, b tels que $a \leq b$ et :

$$\text{ppcm}\,(a,b) = 21\text{pgcd}\,(a,b).$$

IV Nombres premiers

Exercice 7 :
Soient $a, n \in \mathbb{N}^*$, soit p un nombre premier. Montrer que :

$$p | a^n \Rightarrow p^n | a^n.$$

Exercice 8 : ($\star$)
Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
Montrer qu'aucun des entiers successifs de $n!+2$ à $n!+n$ n'est premier. Comment obtenir n entiers consécutifs non premiers ?
Donner cinq entiers naturels consécutifs non premiers les plus petits possibles.

Exercice 9 : ($\star\star$)
Soient $a, b, c, k \in \mathbb{N}^*$ tels que $ab = c^k$ et $\text{pgcd}\,(a,b) = 1$. Montrer qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^*$ tels que $a = \alpha^k$ et $b = \beta^k$.

Exercice 10 : ($\star$)
Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $a_i n\mathbb{R}$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a^n - 1 = (a-1)(1 + a + \dots a^{n-1})$.
2. Montrer que si $2^p - 1$ est premier, alors p est premier.
3. On appelle nombre parfait un entier n dont la somme des diviseurs vaut $2n$.
   Montrer que si $2^p - 1$ est premier, alors $2^{p-1}(2^p - 1)$ est un nombre parfait.

Exercice 11 : ($\star\star$)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$ sa décomposition en produit de facteurs premiers.

1. Calculer le nombre de diviseurs positifs de n.
2. Calculer la somme $S(n)$ des diviseurs positifs de n.
3. Montrer que si m et n sont premiers entre eux alors $S(mn) = S(m)S(n)$.