Exercices du chapitre 27 : Fonctions de deux variables

I Ouverts de $\mathbb{R}^2$, fonctions continues

Exercice 1 :
Etudier l'existence et la valeur éventuelle d'une limite en $(0,0)$ pour les fonctions f suivantes :

1. $f(x,y) = \dfrac{x^5 y^3}{x^6+y^4}$,
2. $f(x,y) = \dfrac{1+x+y}{x^2-y^2}$,
3. $f(x,y) = \dfrac{\sin x - y}{x - \sin y}$.

Exercice 2 :
Etudier la continuité des fonctions suivantes de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$:

1. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$,
2. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$,
3. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$,

Exercice 3 : ($\star$)
Déterminer l'ensemble de continuité des applications f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ suivantes :

1. $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{xy} & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0 \end{cases}$,
2. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^x-e^y}{x-y} & \text{si } x \neq y \\ e^x & \text{si } x = y \end{cases}$.

II Dérivées partielles

Exercice 4 :
Si elles existent, calculer les dérivées partielles premières en $(0,0)$ des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$,
2. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x\sin y - y\sin x}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.
3. $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^x & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

Exercice 5 :
Soient $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x,y \in \mathbb{R},\ f(x,y) = \int_0^y (x-t)\varphi(t)\,dt.$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles premières.

Exercice 6 : ($\star$)
Les fonctions suivantes sont-elles de classe $\mathcal{C}^1$ au point $(0,0)$? Si oui, calculer leur gradient en ce point.

1. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$,
2. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2)+\sin(y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

Exercice 7 : ($\star\star$)
On pose $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y),\ y \in \mathbb{R}^+\}$. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \in \mathbb{R}^{-*} \\ y^2 & \text{si } (x,y) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^+ \\ y^3 & \text{si } (x,y) \in \mathbb{R}^{-*} \times \mathbb{R}^+ \end{cases}.$$

1. Montrer que U est ouvert et que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.
2. La fonction f est-elle constante par rapport à x sur U ? Expliquer.

Exercice 8 : (⋆ ⋆ ⋆)
Etudier et simplifier la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y)=\operatorname{Arccos}\frac{1-xy}{\sqrt{1+x^2+y^2+x^2y^2}}.$$

Exercice 9 : (⋆⋆)
Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{y^4}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

Si elles existent, on appelle dérivées partielles secondes, les dérivées partielles de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ et on note :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\text{ et }\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f admet des dérivées partielles d'ordre 2 en tout point. Comparer $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$.
3. La fonction $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ est-elle continue ?

III Dérivées partielles et composées

Exercice 10 :
Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes :
1. $(x,y)\mapsto xf(x,y)$,
2. $(x,y)\mapsto f(x+y,x-y)$,
3. $(x,y)\mapsto f(y,f(x,x))$,
4. $(x,y)\mapsto f\left(xy,\frac{x}{y}\right)$.

Exercice 11 : (⋆⋆)
Soit $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x>0\}$. On recherche toutes les fonctions $f\in\mathcal{C}^1(D,\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall (x,y)\in D,\ x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=0.$$

1. Vérifier que $\varphi:(x,y)\mapsto\frac{y}{x}$ est solution du problème.
2. Soit $g\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, montrer que $g\circ\varphi$ est solution du problème.
3. Soit f une solution, montrer que $f(u,uv)$ ne dépend que de v.
4. Donner l'ensemble des solutions.

Exercice 12 : (⋆⋆)
Déterminer l'ensemble des fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2\setminus\{(x,0)\in\mathbb{R}^2,\ x\leq 0\}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$x\frac{\partial f}{\partial y}-y\frac{\partial f}{\partial x}=kf,$$

où $k\in\mathbb{R}$.
On pourra poser $g:(r,\theta)\mapsto(r\cos\theta,r\sin\theta)$ et étudier $\frac{\partial(f\circ g)}{\partial\theta}$.
Existe-t-il une solution continue sur $\mathbb{R}^2$?

IV Extremums

Exercice 13 :
Déterminer les extremums locaux et globaux des applications f suivantes :

1. $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}\\ (x,y) & \mapsto & x^3+xy^2-x^2y-y^3\end{array},$
2. $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}\\ (x,y) & \mapsto & (x+y)^2+x^4+y^4\end{array},$

Exercice 14 : (⋆)
Déterminer les extremums locaux et globaux des applications f suivantes :

1. $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}\\ (x,y) & \mapsto & x^2+(x+y-1)^2+y^2\end{array},$
2. $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}\\ (x,y) & \mapsto & 2x^4-3x^2y+y^2\end{array},$
3. $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}\\ (x,y) & \mapsto & x^2y+\ln(1+y^2)\end{array}.$