

I Convergence et divergence

Exercice 1 :

Montrer que la série suivante est convergente et calculer sa somme :

$$\sum_{n \geq 2} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} \right).$$

Exercice 2 : (★)

Montrer que la série suivante est convergente et calculer sa somme :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{3n+2}{n(n+1)(n+2)}.$$

Exercice 3 : (★★)

Montrer que la série suivante est convergente et calculer sa somme :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{6^n}{(3^{n+1} - 2^{n+1})(3^n - 2^n)}.$$

II Séries à termes positifs

Exercice 4 :

Soient $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries réelles convergentes, soit $\sum_{n \geq 0} w_n$ une série réelle telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq w_n \leq v_n.$$

Montrer que $\sum_{n \geq 0} w_n$ converge.

Exercice 5 : (★)

Soit (u_n) une suite de réels positifs telle que $\sum u_n$ converge. Etudier la nature de la série de terme général :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \sqrt{u_n u_{2n}}.$$

Exercice 6 : (★★) Soit (u_n) une suite décroissante à termes positifs telle que la série $\sum u_n$ converge. Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n u_n = 0.$$

Exercice 7 : (★★)

Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{a_n}{(1+a_0) \dots (1+a_n)}.$$

1. Montrer que la série $\sum v_n$ converge.
2. Montrer que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = 1 \Leftrightarrow \sum a_n \text{ diverge.}$$

Exercice 8 : (★★)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On suppose que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l.$$

1. (a) Si $l > 1$, montrer que $\sum u_n$ diverge.
(b) Si $l \in [0, 1[$, montrer que $\sum u_n$ converge.

Ce résultat est appelé le critère de D'Alembert.

2. Etudier alors la nature des séries de terme général :

$$(a) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{2^n (\sin \alpha)^{2n}}{n^2} \text{ où } \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$(b) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{\prod_{k=1}^n (2k)}{n^n}$$

$$(c) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{\ln n}{n!}$$

$$(d) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{\ln n}{2^n}$$

Exercice 9 : (★) Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs. Etudier, selon la nature de $\sum u_n$ la nature de la série de terme général :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{u_n}{1+u_n}.$$

Exercice 10 : (★★)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels positifs, telles que (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang. On suppose que $u_n \sim v_n$.

1. Si $\sum v_n$ converge, montrer que :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n}^{+\infty} v_k.$$

2. Si $\sum v_n$ diverge, montrer que :

$$\sum_{k=0}^n u_k \sim \sum_{k=0}^n v_k.$$

Exercice 11 :

Déterminer la nature de la série de terme général :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \int_0^{\pi/n} \sqrt{\sin x} dx.$$

Exercice 12 :

Etudier la convergence des séries de terme général :

- $u_n = (1 - \cos \frac{\pi}{n})(\ln n)^{1000},$
- $v_n = \sqrt[3]{n^3 + an} - \sqrt{n^2 + 3}, a \in \mathbb{R}.$

Exercice 13 :

Etudier la nature de la série $\sum u_n$ dans les cas suivants :

- $u_n = \frac{1}{n^2 - \ln n},$
- $u_n = n - \sin \frac{1}{n},$
- $u_n = n \cdot \sin \frac{1}{n^2}.$

Exercice 14 :

Etudier la nature de la série de terme général :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 2\ln(n^3 + 1) - 3\ln(n^2 + 1).$$

Exercice 15 : (★★)

1. Soit $\alpha \in]0, 1[$. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}.$$

Déterminer un équivalent de (S_n) .

2. Soit $\alpha > 1$. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}.$$

Déterminer un équivalent de (R_n) .

Exercice 16 : (★★) Soit $p \in \mathbb{N}$, étudier, selon la valeur de p la nature de la série de terme général :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1! + 2! + \dots + n!}{(n+p)!}.$$

Exercice 17 : (★★)

Déterminer, pour $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé, la nature de la série de terme général :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k^2 + (n-k)^2)^\alpha}$$

Exercice 18 : (★★)

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} - \ln n.$$

Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

Exercice 19 : (★★)

Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Le réel γ est appelé la constante d'Euler.

Exercice 20 : (★★)

Soit (u_n) une suite de réels positifs. On suppose que la limite suivante existe :

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln \frac{1}{u_n}}{\ln n}.$$

Montrer que si $\lambda > 1$, la série $\sum u_n$ converge et si $\lambda < 1$, la série $\sum u_n$ diverge.

Exercice 21 : (★★★)

Soit $\varphi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ injective. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi(n)}{n^2}$ diverge.

III Séries absolument convergentes

Exercice 22 :

Etudier la nature de la série $\sum u_n$ dans les cas suivants :

1. $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$,
2. $u_n = \cos n \left(1 - \cos \frac{1}{n} \right)$,
3. $u_n = \frac{\sin n}{n^2}$,
4. $u_n = \frac{(1+n) \sin(n)}{n^2 \sqrt{n}}$.

Exercice 23 : (★)

Etudier la nature des séries de termes généraux suivants :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sqrt{n^4 + 2n + 1} - \sqrt{n^4 + kn}$, où $k \in \mathbb{N}$,
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{2n} - \left(1 + \frac{2}{n+a^2} \right)^n$, où $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 24 : (★★)

1. Démontrer la règle de Raabe-Duhamel : soit $a \in \mathbb{R}$, soit (u_n) une suite à termes strictement positifs telle que, au voisinage de $+\infty$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1 + \frac{a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)}.$$

Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que, au voisinage de $+\infty$:

$$u_n \sim \frac{\lambda}{n^a}.$$

2. Soient $a, b \in \mathbb{R}^+$, soit u_n la suite définie par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}.$$

Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 25 : (★★)

1. Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs, décroissante et convergeant vers 0.

On considère la suite (S_n) définie par $S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- (a) Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.
- (b) En déduire que la série $\sum (-1)^n u_n$ est convergente.
Ce résultat est appelé le critère spécial des séries alternées.

2. Applications :

- (a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Etudier la nature de la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$.

- (b) Etudier la nature de la série de terme général :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = (-1)^n \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-n} - \frac{1}{e} \right),$$

- (c) Etudier la nature de la série de terme général :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sin \left(\pi \frac{n^3 + 1}{n^2 + 1} \right).$$

- (d) Etudier la nature de la série de terme général :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x \ln x} dx.$$