Exercices du chapitre 25 : Espaces préhilbertiens réels

I Produit scalaire

Exercice 1 :
Soit :

$$\begin{array}{rccc}\varphi : & \mathbb{R}_2[X]\times\mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R} \\ & (P,Q) & \mapsto & P(-1)Q(-1)+P(0)Q(0)+P(1)Q(1).\end{array}$$

Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

II Norme associée à un produit scalaire

Exercice 2 : Montrer que :

$$\forall x,y,z\in E,\ \|x-z\|^2\leq 2(\|x-y\|^2+\|y-z\|^2).$$

Exercice 3 : (⋆)
Soit $n\in\mathbb{N}^*$, soient $x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}^{+*}$ tels que $\sum_{i=1}^n x_i=1$. Montrer que :

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}\geq n^2.$$

Etudier le cas d'égalité.

Exercice 4 : (⋆)
Soient $a<b$, soit $f\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ telle que f ne s'annule pas sur $[a,b]$.
Montrer que :

$$\int_a^b f(t)\,dt.\int_a^b \frac{1}{f(t)}dt\geq (b-a)^2.$$

Exercice 5 : (⋆) Montrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x_1,\dots,x_n\in E,\ \left\|\sum_{k=1}^n x_k\right\|^2\leq n\sum_{k=1}^n\|x_k\|^2.$$

Exercice 6 : (⋆⋆)
Soit $f\in\mathcal{C}^0([0,1])$ positive. Soit $A=\int_0^1 f$. Montrer que :

$$\sqrt{1+A^2}\leq\int_0^1\sqrt{1+f(x)^2}dx\leq 1+A.$$

Exercice 7 : (⋆)
On considère l'espace $E=\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ et on pose :

$$\forall f,g\in E,\quad <f,g>=f(1)g(1)+\int_0^1 f'(t)g'(t)dt.$$

1. Montrer que $<\cdot,\cdot>$ définit un produit scalaire sur E.
2. Établir que :

$$\forall f\in E,\quad \left(f(1)+\int_0^1 f'(t)dt\right)^2\leq 2\left(f(1)^2+\int_0^1 f'(t)^2dt\right).$$

III Orthogonalité

Exercice 8 : (⋆⋆)
Soit E un espace préhilbertien. Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E. Montrer que :

$$(F+G)^\perp=F^\perp\cap G^\perp,$$

$$F^\perp+G^\perp\subset(F\cap G)^\perp.$$

Exercice 9 : (⋆⋆) On munit $E=\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ du produit scalaire défini par :

$$\forall f,g\in E,\ (f|g)=\int_0^1 fg.$$

On considère l'espace vectoriel $H=\{f\in E,\ f(0)=0\}$.

1. Soit $f\in H^\perp$. On pose $g:t\mapsto tf(t)$. Que peut-on dire de f et g ? En déduire que $f=0$.
2. En déduire $H^\perp$ et $H^{\perp\perp}$.

Exercice 10 : (⋆⋆)
Déterminer l'orthogonal de l'ensemble des matrices diagonales $D_n(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 11 : (⋆⋆)
On considère l'espace $E = \mathbb{R}_n[X]$, et on pose :

$$< P,Q >= \int_0^1 P(t)Q(t)dt.$$

Pour tout $0 \leq p \leq n$, on pose $Q_p(X) = X^p(X-1)^p$ et $L_p(X) = Q_p^{(p)}$.

1. Montrer que $< \cdot,\cdot >$ définit un produit scalaire sur E.
2. Montrer que L_p est un polynôme dont on précisera son degré et son coefficient dominant.
3. Calculer par intégration par parties $< L_p, L_q >$ pour $p \neq q$. En déduire que $(L_0,\dots,L_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Déterminer enfin la norme euclidienne de L_p.

Exercice 12 :
Orthonormaliser pour le produit scalaire canonique la famille de $\mathbb{R}^3$:

$$u_1 = (1,1,0),\ u_2 = (1,0,1),\ u_3 = (0,1,1).$$

Exercice 13 : Orthonormaliser, pour le produit scalaire usuel, la base suivante de $\mathbb{R}^4$:

$$u_1 = (0,1,1,1),\ u_2 = (1,0,1,1),\ u_3 = (1,1,0,1),\ u_4 = (1,1,1,0).$$

Exercice 14 : (⋆) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. On pose :

$$\forall P,Q \in E,\ (P|Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt.$$

1. Montrer que $(.|.)$ défini un produit scalaire sur E.
2. On pose $n = 3$. Orthonormaliser la base canonique de E pour le produit scalaire $(.|.)$.

Exercice 15 : (⋆)
Montrer que l'application suivante est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ ((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) & \mapsto & (x_1-2x_2)(y_1-2y_2)+x_2y_2+(x_2+x_3)(y_2+y_3) \end{array}.$$

Orthonormaliser pour ce produit scalaire la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 16 : (⋆)
On définit $\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R}_2[X]^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (P,Q) & \mapsto & \sum_{k=0}^{2} P(k)Q(k) \end{array}$.

1. Montrer que φ définit un produit scalaire.
2. Donner une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.

IV Bases orthonormées d'un espace euclidien

Exercice 17 :
Soit E un espace euclidien, soient $f,g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$. On suppose que les matrices de f et de g dans une base orthonormée sont respectivement symétriques et antisymétriques.
Montrer que :

$$\forall x \in E,\ (f(x)|g(x)) = 0,$$

et

$$\forall x \in E,\ \|(f-g)(x)\| = \|(f+g)(x)\|.$$

Exercice 18 : (⋆⋆) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $e_1,\dots,e_n \in E$ tels que :

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \|e_i\| = 1 \text{ et } \forall x \in E,\ \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (e_k|x)^2.$$

Montrer que $(e_1,\dots,e_n)$ est une famille orthonormale de E, puis que c'est une base de E. En déduire que E est de dimension finie.

Exercice 19 : (⋆⋆)
Soit E un espace euclidien et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$\forall x,y \in E,\ (\varphi(x)|\varphi(y)) = (x|y).$$

1. Montrer que :

$$\ker(\varphi - id_E) = \mathrm{Im}\,(\varphi - id_E)^{\perp}.$$

2. Montrer que :

$$(\varphi - id_E)^2 = 0_{\mathcal{L}(E)} \iff \varphi = id_E.$$

V Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

Exercice 20 :
On se place dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel.
On pose :

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x+y+z+t = 0,\ x-y+z-t = 0\}.$$

Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F.

Exercice 21 :
On se place dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel.
On pose :

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x+2y+3z+4t = 0,\ x+3y+5z+7t = 0\}.$$

Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F.

Exercice 22 :
Soit E un espace euclidien. Soit $u \in E \setminus \{0\}$ et soit $H = (\text{Vect}(u))^\perp$. Soit p la projection orthogonale sur H et s la symétrie orthogonale par rapport à H, c'est-à-dire la symétrie par rapport à H parallèlement à $H^\perp$.

1. Montrer que :
$$\forall x \in E,\ p(x) = x - \frac{(x|u)}{\|u\|^2}u.$$
2. Montrer que :
$$\forall x \in E,\ s(x) = x - 2\frac{(x|u)}{\|u\|^2}u.$$

Exercice 23 : (⋆⋆)
Soit p un projecteur de E espace vectoriel euclidien. Montrer que p est une projection orthogonale si et seulement si :

$$\forall x \in E,\ \|p(x)\| \leq \|x\|.$$

Exercice 24 : (⋆) On considère $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique.
On pose $F = \text{Vect}(e_1, e_2)$, avec $e_1 = (1,0,1,0)$ et $e_2 = (1,-1,1,-1)$.

1. Déterminer une base orthonormale de F.
2. Déterminer l'orthogonal de F.
3. Ecrire la matrice de la projection orthogonale sur F dans la base canonique.
4. Calculer la distance du vecteur $(1,1,1,0)$ à F.

Exercice 25 : (⋆⋆) Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On définit :

$$\forall P,Q \in E,\ (P|Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt.$$

1. Montrer que $(.|.)$ est un produit scalaire sur E. E est-il un espace euclidien?
2. Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.
3. En traduisant ce problème en termes de distance à un sous-espace, calculer :
$$\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2\,dt.$$

Exercice 26 : (⋆)
On se place dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel.
On pose $x = (2,2,3,4)$ et $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x+2y-3z+t = 0\}$. Déterminer :

$$d(x,F).$$

Exercice 27 : (⋆⋆)
On se place dans $\mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire suivant :

$$\langle \sum_{i=0}^{3} a_i X^i, \sum_{i=0}^{3} b_i X^i \rangle = \sum_{i=0}^{3} a_i b_i.$$

On pose $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X],\ P(1) = 0\}$. Déterminer :

$$d(X^3 + 2X^2 - X + 1, F).$$

Exercice 28 : (⋆⋆)
On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire usuel.
Soit U la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Calculer :

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \|M - aI_n - bU\|.$$

Exercice 29 : (⋆⋆)
On note $E = \mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(.|.)$ défini par :

$$\forall f,g \in E,\ (f|g) = \int_{-1}^{1} fg.$$

On note $\|.\|$ la norme associée à $(.|.)$ et d la distance associée à $\|.\|$.
Soit I (resp. P) l'ensemble des fonctions impaires (resp. paires).

1. Montrer que I et P sont deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires orthogonaux dans E.
2. Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{2+x}$. Calculer $d(f,P)$.