Exercices du chapitre 24 : Déterminants

I Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

Exercice 1 :
Calculer :

$$d_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} \text{ et } d_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

Exercice 2 : (⋆)
Soit $x \in \mathbb{R}$, on considère le déterminant suivant :

$$D(x) = \begin{vmatrix} 1 & x^2-3 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -x^2+6 \end{vmatrix}.$$

1. Donner quatre racines évidentes de D.
2. Montrer que D est une fonction polynomiale dont on déterminera le degré.
3. En déduire la valeur de $D(x)$ sans développer entièrement le calcul de déterminant.

Exercice 3 : Soient $P_1 = 1+X-X^2$, $P_2 = 3-X+5X^2$ et $P_3 = -1+2X+3X^2$. La famille (P_1, P_2, P_3) est-elle une base de $\mathbb{R}_2[X]$?

II Déterminant d'un endomorphisme

Exercice 4 :
Soit $u : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$, $P \mapsto (XP)'$. Calculer $\det(u)$.

Exercice 5 : (⋆)
Soit φ l'application qui, à tout polynôme réel P de degré inférieur ou égal à 2, associe Q défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) = \int_x^{x+1} P(t)\,dt.$$

Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ et calculer $\det(\varphi)$.

Exercice 6 : (⋆⋆)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle sont les valeurs possibles pour le déterminant de $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^3 + 2f = 0$?

III Déterminant d'une matrice carrée

Exercice 7 : (⋆)

1. Montrer que pour tout $(u, v, w) \in \mathbb{C}^3$:

$$u^3+v^3+w^3-3uvw = \begin{vmatrix} u & v & w \\ w & u & v \\ v & w & u \end{vmatrix}.$$

2. Soient $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{C}$. On pose : $X = ax+by+cz$, $Y = bx+cy+az$ et $Z = cx+ay+bz$. Montrer que :

$$X^3+Y^3+Z^3-3XYZ = (a^3+b^3+c^3-3abc)(x^3+y^3+z^3-3xyz).$$

Exercice 8 :
Montrer que le déterminant d'une matrice antisymétrique d'ordre impair est nul.

Exercice 9 : (⋆)
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à :

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -3 & 3 & -3 \\ -1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

1. On pose $u_1 = (1,1,0,0)$, $u_2 = (0,1,1,0)$, $u_3 = (0,0,1,1)$ et $u_4 = (-1,0,0,1)$. Montrer que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer $B = Mat_{\mathcal{B}}(f)$.
3. Déterminer $\det B$, $\det f$ et $\det A$.

IV Calcul des déterminants

Exercice 10 :
Déterminer les $\lambda \in \mathbb{C}$ pour lesquels la matrice $M(\lambda)$ est inversible, où :

$$M(\lambda) = \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ 7 & -5-\lambda & 1 \\ 6 & -6 & 2-\lambda \end{pmatrix}.$$

Exercice 11 :
Calculer le déterminant de la matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ où :

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!],\ a_{i,j} = \inf(i, j).$$

Exercice 12 : (⋆⋆)
Calculer $\det A$ où $A = (|i-j|)_{i,j\in[\![1,n]\!]}$.

Exercice 13 : (⋆⋆) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $p \geq 2$, on note $\Delta_{n,p}$ le déterminant d'ordre p suivant :

$$\Delta_{n,p} = \begin{vmatrix} 1 & \binom{n}{1} & \cdots & \binom{n}{p-1} \\ 1 & \binom{n+1}{1} & \cdots & \binom{n+1}{p-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \binom{n+p-1}{1} & \cdots & \binom{n+p-1}{p-1} \end{vmatrix}$$

où l'on a posé : $\forall k, j \in \mathbb{N}^*,\ \binom{k}{j} = 0$ si $k < j$.
Montrer, en effectuant des opérations sur les colonnes que pour $p \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}$, $\Delta_{n,p} = \Delta_{n+1,p}$.
En déduire la valeur de $\Delta_{n,p}$.

Exercice 14 : (⋆)
Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Montrer que l'application :

$$u_A : \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{K}), \quad M \mapsto AM$$

est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Montrer que $\det(u_A) = (\det(A))^2$.

Exercice 15 :
Soit $n \geq 2$. On pose :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & -1 \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

Déterminer une relation de récurrence entre Δ_n et Δ_{n+1} et en déduire la valeur de Δ_n en fonction de n.

Exercice 16 : (⋆) Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $M_n \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ telle que :

$$M_n = \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & \cdots & 0 & b \\ 0 & a & 0 & 0 & b & 0 \\ \vdots & 0 & a & b & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & b & a & 0 & \vdots \\ 0 & b & 0 & 0 & a & 0 \\ b & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a \end{pmatrix}$$

Montrer que :

$$\det(M_n) = (a^2 - b^2)^n.$$

Exercice 17 : (⋆)
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$. Calculer :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_1 & \cdots & a_1 & a_1 \end{vmatrix}.$$

Exercice 18 : (⋆⋆)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $(a, b) \neq (0, 0)$. Calculer $\det M_n$ où $M_n = (m_{i,j})_{i,j\in[\![1,n]\!]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifie :

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!],\ m_{i,j} = \begin{cases} a+b & \text{si } i = j \\ ab & \text{si } j = i+1 \\ 1 & \text{si } i = j+1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 19 : (⋆⋆)
Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ des nombres complexes de module 1 et tous différents. Soient $a_1, \ldots, a_s \in \mathbb{C}$.

Montrer que la suite :

$$\left(\sum_{k=1}^{s} a_k \lambda_k^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

est convergente de limite nulle ssi tous les complexes $a_1, \dots, a_s$ sont nuls.

Exercice 20 : (⋆ ⋆ ⋆)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, soient $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |x| < \varepsilon \Rightarrow A + xB \in GL_n(\mathbb{R}).$$