Exercices du chapitre 22 :
Probabilités sur un univers fini, variables aléatoires et lois

I Univers, événements, variables aléatoires

II Espaces probabilisés finis

Exercice 1 :
On considère 6 dés non pipés de couleurs différentes (donc discernables). Quelle est la probabilité que toutes les faces donnent un chiffre différent ?

Exercice 2 : ($\star$)
Une urne contient 15 boules : une noire, 5 blanches et 9 rouges.

1. On tire simultanément et au hasard trois boules de cette urne. Calculer la probabilité des événements suivants :
   (a) A : « le tirage est tricolore »
   (b) B : « parmi les boules tirées figurent exactement une noire et au moins une rouge »
   (c) C : « les trois boules tirées sont de la même couleur. »
2. On suppose désormais que le tirage s'effectue successivement avec remise. Déterminer les probabilités des événements A, B et C définis ci-dessus.

Exercice 3 :
Une urne contient 9 boules numérotées de 1 à 9. On tire deux boules de cette urne. Calculer la probabilité d'obtenir des numéros de la même parité dans les différents cas suivants :

1. on tire deux boules simultanément,
2. on tire une boule, on ne la remet pas, puis on tire la seconde,
3. on tire une boule, on la remet, puis on tire la seconde.

Exercice 4 :
Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soient A et B des événements. On considère l'événement C :

C :"A ou B se réalise, mais pas les deux."

Déterminer $P(C)$.

Exercice 5 : ($\star\star$)
Une urne contient n boules numérotées de 1 à n.
Soit $r \in [\![2, n]\!]$.
On tire avec remise r boules dans cette urne.

1. On considère l'événement :

   E_r :"Le numéro de la boule tirée au $r^{\text{ième}}$ tirage est inférieur ou égal à tous les précédents."

   Déterminer la probabilité de E_r.
2. Donner la valeur de cette probabilité en fonction de n pour $r = 2$.
3. Déterminer :
$$\lim_{n \to +\infty} P(E_r)$$

Exercice 6 : ($\star$)

1. Une urne contient M jetons numérotés de 1 à M. On tire successivement n jetons en remettant chaque fois le jeton tiré et en brassant bien. On cherche la probabilité qu'aucun jeton ne soit tiré plus d'une fois.
2. On considère une classe de n élèves, avec $n \leq 365$. Quelle est la probabilité qu'au moins deux élèves aient leur anniversaire le même jour ? (On suppose qu'aucun élève n'est né le 29 février.)

Exercice 7 : ($\star\star$)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n.

1. On prélève en une fois une poignée aléatoire de p boules de l'urne ($p \in [\![0, n]\!]$).
   (a) Soit $k \in [\![p, n]\!]$. Calculer la probabilité de l'événement :

   A_k : "Le plus grand numéro de la poignée est k"

   (b) En déduire que :
$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k-1}{p-1} = \binom{n}{p}.$$
2. On tire successivement et sans remise p boules de l'urne. Déterminer la probabilité pour que la $p^{\text{ième}}$ boule tirée ait un numéro supérieur aux $p-1$ numéros précédents.

III Probabilités conditionnelles

Exercice 8 : **($\star$)** Une urne contient 4 boules blanches et 2 boules noires indiscernables au toucher. On tire 3 boules successivement sans remise. Déterminer la probabilité de : « tirer une boule noire pour la première fois au troisième tirage ».

Exercice 9 : **($\star\star$)**
Une expérience est conduite pour étudier la mémoire des rats. Un rat est mis devant trois couloirs. Au bout de l'un d'eux se trouve la nourriture qu'il aime, au bout des deux autres, il reçoit une décharge électrique. Cette expérience est répétée jusqu'à ce que le rat trouve le couloir avec la nourriture, auquel cas l'expérience s'arrête.
Sous chacune des hypothèses suivantes, déterminer la probabilité que la k-ième tentative soit la première réussie.

1. Le rat n'a aucun souvenir des expériences antérieures.
2. Le rat se souvient de l'expérience immédiatement précédente, mais pas des autres.
3. Le rat se souvient des deux expériences précédentes.

Exercice 10 : **($\star$)**
Deux joueurs J_1 et J_2 jouent aux dés avec deux dés non truqués. J_1 gagne si la somme des dés donne 6 et J_2 gagne si la somme des dés vaut 7.

1. Quelle est la probabilité pour que J_1 gagne au n-ième coup ?
2. Calculer la probabilité p_n pour que J_1 gagne en moins de n coups.
3. Calculer la probabilité q_n pour que J_2 gagne en moins de n coups.
4. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} p_n$ et $\lim_{n\to+\infty} q_n$. Interpréter.

Exercice 11 :
Dans une usine, on fabrique des composants electroniques sur trois machines. Les machines M_1, M_2 et M_3 produisent respectivement 50%, 30% et 20% des composants.
Un qualiticien de l'usine estime que :

- 2% des composants fabriqués par la machine M_1 sont défectueux,
- 3% des composants fabriqués par la machine M_2 sont défectueux,
- 5% des composants fabriqués par la machine M_3 sont défectueux.

1. Quelle est la probabilité qu'un composant pris au hasard à la sortie de l'usine soit défectueux ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir une pièce défectueuse provenant de M_1 ?
3. Un composant est défectueux. Quelle est la probabilité pour qu'il provienne de M_1 ?

Exercice 12 : **($\star$)**
Un mobile se déplace aléatoirement dans l'ensemble des sommets d'un triangle ABC de la façon suivante : si à l'instant n il est sur l'un quelconque des trois sommets, alors à l'instant $n+1$, soit il y reste avec une probabilité de $2/3$, soit il se place sur l'un des deux autres sommets, et ceci avec la même probabilité pour chacun de ces deux sommets.
Initialement (c'est-à-dire à l'instant 0), le mobile se trouve en A.
On définit, pour tout n de $\mathbb{N}$ les événements A_n (resp. B_n, C_n) :

"le mobile se trouve en A (resp. en B, en C) à l'instant n"

et les probabilités $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $a_n + b_n + c_n$.
2. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
3. En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - b_n) \text{ et } a_{n+1} - c_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - c_n).$$
4. En déduire une expression de a_n, b_n et c_n en fonction de n.

Exercice 13 : **($\star$)**
Le fonctionnement au cours du temps d'un appareil possédant une maintenance obéit aux règles suivantes :

- s'il fonctionne à la date $n-1$ ($n \in \mathbb{N}^*$), il a la probabilité a de toujours fonctionner à la date n.
- s'il est en panne à la date $n-1$ ($n \in \mathbb{N}^*$), il a la probabilité b d'être encore en panne à la date n

où (a, b) est un couple de réels de $]0,1[$. On suppose que l'appareil est en état de marche à la date 0. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note M_n l'événement « l'appareil est en état de marche à la date n » et $p_n = P(M_n)$.

1. Déterminer p_n pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Déterminer la limite de (p_n)

Exercice 14 :
Un joueur joue à pile ou face avec deux pièces équilibrées de la manière suivante : il lance simultanément ces deux pièces ; s'il n'obtient aucun pile, son gain et nul et la partie s'arrête. S'il obtient au moins un pile, il relance simultanément les deux pièces autant de fois qu'il a obtenu pile à la première phase du jeu et gagne autant d'unités que le nombre de piles obtenu lors de cette deuxième série de jets.

1. Déterminer la probabilité que son gain soit nul.
2. Déterminer la probabilité d'avoir obtenu deux piles au premier jet sachant qu'il a obtenu un seul pile à la seconde étape.

Exercice 15 : (⋆⋆)
Dans un jeu télévisé, trois portes sont fermées. Derrière l'une d'entre elles se trouve une voiture, derrière chacune des deux autres, un porte-clé. Le candidat choisit l'une des portes. Le présentateur, qui sait quelle porte cache la voiture, ouvre alors l'une des deux autres portes, derrière laquelle se trouve un porte-clé. Il propose alors au candidat de changer de porte. Que doit faire le candidat ?

IV Loi d'une variable aléatoire

Exercice 16 : (⋆)
Soit $N \geq 2$. Un joueur jette N fois une pièce équilibrée. Soit X la variable aléatoire donnant le numéro du jet pour lequel on obtient pile pour la première fois.
Etudier la loi de X.

Exercice 17 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Une urne contient n boules dont une seule boule blanche. On effectue des tirages successifs et sans remise jusqu'à obtenir la boule blanche. On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.
Montrer que X suit une loi uniforme.

Exercice 18 : (⋆⋆)
n amis vont au cinéma et choisissent entre 3 films F_1, F_2 et F_3. Les choix sont indépendants et équilibrés entre les films.
Pour $i \in \{1,2,3\}$, on note X_i le nombre de personnes choisissant le film F_i.

1. Déterminer la loi de X_i, pour $i \in \{1,2,3\}$.
2. Soit Y le nombre de films ayant reçu au moins un choix. Déterminer la loi de Y.

Exercice 19 :
On tire une carte au hasard d'un jeu de 32 cartes. On considère les trois variables aléatoires suivantes :

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si on tire un roi} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{si on tire une dame} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$Z = \begin{cases} 1 & \text{si on tire un coeur} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Déterminer les lois conjointes et les lois marginales des couples (X,Y) et (X,Z).

V Evénements indépendants

Exercice 20 : (⋆⋆)
Une personne va remplir une urne vide avec trois boules dont la couleur (noire ou blanche) est choisie au hasard. Pour cela, elle lance trois fois une pièce équilibrée, et, pour chaque pile obtenue, la personne met une boule blanche dans l'urne, et pour chaque face obtenue, une boule noire.

Une autre personne, qui ne connaît pas la couleur des boules dans l'urne tire, avec remise, n boules ($n \in \mathbb{N}^*$). On note B_i l'événement « La couleur de la i-ème boule tirée est blanche. »

1. Calculer $P(B_1)$, $P(B_2)$ et $P(B_1 \cap B_2)$. Les événements $B_1, \dots, B_n$ sont-ils deux à deux indépendants ?
   On note B^n l'événement : « Les n boules tirées sont blanches. »
2. Exprimer B^n en fonction de $B_1, \dots, B_n$ et calculer $P(B^n)$.
3. Lors des trois premiers tirages, on a obtenu 3 boules blanches. Quelle est la probabilité que l'une contienne 3 boules blanches ?
4. Lors des trois premiers tirages, on a obtenu 3 boules blanches. Quelle est la probabilité que la quatrième boule soit encore blanche ?

Exercice 21 : (⋆⋆)
On s'intéresse à la survie d'une espèce pour laquelle un individu admet 3 descendants avec la probabilité $\frac{1}{8}$, 2 descendant avec la probabilité $\frac{3}{8}$, 1 descendant avec la probabilité $\frac{3}{8}$ et aucun descendant avec la probabilité $\frac{1}{8}$, indépendamment de ses congénères.
A l'instant initial, on suppose que la population est composée d'un seul individu. Par conséquent, l'espèce s'éteindra au bout de la première génération avec une probabilité de $x_1 = \frac{1}{8}$.

1. Déterminer la probabilité x_2 pour que l'espèce ait disparu à l'issue de la deuxième génération.
2. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, x_n la probabilité pour qu'il n'y ait aucun individu à la n-ième génération. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_{n+1} = \frac{1}{8}x_n^3 + \frac{3}{8}x_n^2 + \frac{3}{8}x_n + \frac{1}{8}.$$
3. Etudier la suite (x_n) et montrer qu'elle converge vers $-2+\sqrt{5}$. Interpréter ce résultat.

Exercice 22 : (⋆⋆)
Deux joueurs A et B lancent à tour de rôle un dé équilibré. Le jeu s'arrête dès qu'un joueur gagne avec sa stratégie : A gagne s'il obtient 1 ou 2, B gagne s'il obtient 3,4 ou 5. A commence.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les probabilités pour que A (resp. B) gagne à la partie n.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les probabilités pour que A (resp. B) gagne en moins de n parties.
   Interpréter les limites des probabilités obtenues.

VI Variables aléatoires indépendantes

Exercice 23 :
Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{-1, 1\}$ prenant toutes les deux la valeur 1 avec une probabilité $\frac{2}{3}$.
Soient X et Y les variables aléatoires définies par :

$$X = U, \quad Y = \begin{cases} V & \text{si } U = 1 \\ -V & \text{si } U = -1. \end{cases}$$

1. Déterminer la loi du couple de variables aléatoires (X, Y). Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Les variables aléatoires X^2 et Y^2 sont-elles indépendantes ?

Exercice 24 : ($\star$) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. Déterminer la loi de $U = \max(X, Y)$ et de $V = \min(X, Y)$.

Exercice 25 : ($\star\star$)
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$. Déterminer la loi de $S = X + Y$.

Exercice 26 : ($\star\star$)
Soit $N \geq 2$. Une urne contient $N + 1$ boules numérotées de 0 à N.
On tire avec remise une boule.
On considère les variables aléatoires suivantes :
$X_1 = 1$, et pour $i \geq 2$, $X_i = 1$ si le numéro tiré au tirage i n'est pas sorti dans les tirages précédents, $X_i = 0$ sinon.
Déterminer la loi de X_i.
Les variables aléatoires X_i et X_j sont-elles indépendantes, pour $i \neq j$?