Exercices du chapitre 21 : Dénombrement

Exercice 1 : (⋆⋆) Soit E un ensemble. Montrer que si $\mathcal{P}(E)$ est fini, alors E est fini.

Exercice 2 : (⋆⋆)
Soient E et F deux ensembles, soit $f : E \to F$ une application.

1. Montrer que si E est fini, alors $f(E)$ est fini et $\mathrm{Card}\,(f(E)) \leq \mathrm{Card}\,(E)$ avec égalité si et seulement si f est injective.
2. Montrer que si E est fini et si f est surjective, alors F est fini et $\mathrm{Card}\,(F) \leq \mathrm{Card}\,(E)$ avec égalité si et seulement si f est bijective.
3. Montrer que si f est injective et si $f(E)$ est fini alors E est fini et $\mathrm{Card}\,(E) = \mathrm{Card}\,(f(E))$.

Exercice 3 : (⋆) Déterminer le cardinal de l'ensemble :

$$E = \{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \geq j\}.$$

Exercice 4 : (⋆⋆)
Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geq 1$. Calculer :

$$\sum_{(X,Y)\in\mathcal{P}(E)^2} \mathrm{Card}\,(X \cap Y) \text{ et } \sum_{(X,Y)\in\mathcal{P}(E)^2} \mathrm{Card}\,(X \cup Y).$$

Exercice 5 : (⋆⋆)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $(E_k)_{1\leq k\leq n}$ une famille d'ensembles finis. Montrer que :

$$\mathrm{Card}\,\Big(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\Big) = \sum_{k=1}^{n}\left((-1)^{k-1}\sum_{I\in I_k}\mathrm{Card}\,\Big(\bigcap_{i\in I} E_i\Big)\right),$$

où I_k désigne l'ensemble des parties à k éléments de $[\![1,n]\!]$.

Exercice 6 :
Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geq 2$. Soient $a, b \in E$ tels que $a \neq b$.

1. Quel est le nombre de parties de E ne contenant ni a ni b ?
2. Quel est le nombre de parties de E contenant a ?

Exercice 7 : (⋆⋆) Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geq 1$. Montrer que :

$$\sum_{X\in\mathcal{P}(E)} \mathrm{Card}\,(X) = n2^{n-1}.$$

On pourra effectuer le changement de variable $Y = \overline{X}$ ou remarquer que $\mathcal{P}(E) = \bigcup_{k=0}^{n}\{X \in \mathcal{P}(E),\ \mathrm{Card}\,X = k\}$.

Exercice 8 :
Une urne contient 15 boules numérotées de 1 à 15. Les boules numérotées de 1 à 5 sont blanches et les boules numérotées de 6 à 15 sont noires.
On tire successivement 5 boules de l'urne sans remise.

1. En tenant compte de l'ordre, combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien de tirages donnent deux boules blanches et trois boules noires dans un ordre quelconque ?

Exercice 9 : Soit E l'ensemble des nombres à 6 chiffres ne contenant pas de 0 dans leur écriture décimale.

1. Quel est le cardinal de E ?
2. Combien y a-t-il d'éléments de E composés de chiffres différents ?
3. Combien y a-t-il d'éléments impairs dans E ?
4. Combien y a-t-il d'éléments de E ne contenant que des 2 ou des 3 ?

Exercice 10 : (⋆⋆)
Soient $n, k \in \mathbb{N}$ tels que $2 \leq k \leq n$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n.

1. On tire successivement et sans remise k boules de l'urne.
   (a) En tenant compte de l'ordre, combien y a-t-il de tirages possibles ?
   (b) Combien y a-t-il de tirages commençant par la boule 1 ?
2. On tire successivement et avec remise k boules de l'urne.
   (a) En tenant compte de l'ordre, combien y a-t-il de tirages possibles ?
   (b) Combien y a-t-il de tirages durant lesquels deux numéros exactement sont apparus ?

Exercice 11 :
Une urne contient 15 boules numérotées de 1 à 15. Les boules numérotées de 1 à 5 sont blanches et les boules numérotées de 6 à 15 sont noires.
On tire simultanément 5 boules de l'urne.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien de tirages donnent deux boules blanches et trois boules noires ?

Exercice 12 : On considère un jeu de 32 cartes et on suppose qu'une main contient 5 cartes.

1. Combien y a-t-il de mains ?
2. Combien y a-t-il de mains contenant exactement un as ?
3. Combien y a-t-il de mains contenant au moins un as ?
4. Combien y a-t-il de mains contenant au moins un as et un roi ?

Exercice 13 : ($\star$)
Soit E un ensemble fini de cardinal n et soit A une partie de E qui contient p éléments.

1. Quel est le nombre de parties à k élément de E contenant un et un seul élément de A ?
2. Quel est le nombre de parties à k élément de E contenant au moins un élément de A ?

Exercice 14 : ($\star\star$) Soit E un ensemble fini de cardinal n.
Déterminer le nombre de triplets $(X, Y, Z) \in \mathcal{P}(E)^3$ tels que $X \subset Y \subset Z$.

Exercice 15 : ($\star\star$)
Soit $N \in \mathbb{N}^*$, on dit qu'une famille $(E_k)_{1\leq k\leq N}$ d'ensembles non vides réalise une partition d'un ensemble E ssi $E = \bigcup_{k=1}^{N} E_k$ et les $(E_k)_{1\leq k\leq N}$ sont deux à deux disjoints.
Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. Quel est le nombre de partitions de E en deux parties ? En trois parties ?