

Exercices du chapitre 20 : Matrices et applications linéaires

I Matrice d'une application linéaire dans des bases

Exercice 1 :  Déterminer les matrices dans les bases canoniques respectives des applications linéaires suivantes :

$$\begin{aligned} u_1 : \mathbb{R}_n[X] &\rightarrow \mathbb{R} \\ P &\mapsto P(1) \end{aligned} ,$$

$$\begin{aligned} u_2 : \mathbb{R}_n[X] &\rightarrow \mathbb{R} \\ P &\mapsto \int_0^1 P(t) dt \end{aligned} ,$$

$$\begin{aligned} u_3 : \mathbb{C}_3[X] &\rightarrow \mathbb{C}_3[X] \\ P &\mapsto P(X+1) - P(X) \end{aligned} ,$$

$$\begin{aligned} u_4 : \mathbb{R}_3[X] &\rightarrow \mathbb{R}_3[X] \\ P &\mapsto P + P' \end{aligned} .$$

Exercice 2 : (★)

Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Soit :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) &\rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \\ M &\mapsto AM. \end{aligned}$$

Montrer que φ est un endomorphisme et donner la matrice de φ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

Exercice 3 : (★★) Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$. Soit $x \in E$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$. Montrer que la famille $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E .

Ecrire la matrice de f dans cette base.

Exercice 4 : (★★)  

Soit $E = \mathbb{K}^n$ et soit $\mathcal{B} = (e_j)_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ une base de E . Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \dots & \beta \\ \beta & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \beta & \dots & \beta & \alpha \end{pmatrix},$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Soit $\mathcal{B}' = (e'_j)_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ définie par : pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $e'_j = \sum_{k=1}^j e_k$.

Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de E et former la matrice de f dans $\mathcal{B}'$.

Exercice 5 :  Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}_4[X]$ défini par : $f : P \mapsto P(1 - X)$ et soit A sa matrice dans la base canonique. Déterminer A^{-1} .

Exercice 6 : (★)

Soit $u : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par $u(P) = (P(0), P(1), P(2))$. Notons $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ celle de $\mathbb{R}^3$.

1. Prouver que u est un isomorphisme.
2. Déterminer u^{-1} .

Exercice 7 : (★★)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket, a_{i,j} = \begin{cases} \begin{pmatrix} j-1 \\ i-1 \end{pmatrix} & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{si } i > j, \end{cases}$$

1. Montrer que l'application :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_n[X] &\rightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) &\mapsto P(X+1) \end{aligned}$$

est un endomorphisme et donner sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1} .

Exercice 8 : (★★) 

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Déterminer $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$. Démontrer que ces deux espaces sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$. En déduire une base de $\mathbb{R}^3$ réunion d'une base de $\text{Ker } f$ et d'une base de $\text{Im } f$. Ecrire la matrice de f dans cette base. Ecrire f comme la composée de deux endomorphismes connus.

II Application linéaire canoniquement associée à une matrice, rang d'une matrice

Exercice 9 : (★) Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et soit $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Posons :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}_2[X])$ tel que : $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u) = A$.

1. Déterminer $\text{Ker } A$ et $\text{Im } A$.
2. En déduire $\text{ker } u$ et $\text{Im } u$.

Exercice 10 :  Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Déterminer $\text{Ker } A$, $\text{Im } A$, $\text{rg}(A)$.

Exercice 11 : (★) Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ et soient u et v les endomorphismes suivants :

$$\begin{array}{ccc} u: E & \rightarrow & E \\ P & \mapsto & P(X+1) \end{array} \quad , \quad \begin{array}{ccc} v: E & \rightarrow & E \\ P & \mapsto & P(X-1) \end{array}.$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit M_λ la matrice dans la base canonique de l'endomorphisme $u + \lambda v$. Déterminer M_λ et le rang de $u + \lambda v$ en fonction de λ .

Exercice 12 : (★) 

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par : $a_{i,j} = 1$ si $i = j$ et $a_{i,j} = a$ sinon, avec $a \in \mathbb{K}$. Déterminer le rang de A en fonction de a et n .

Exercice 13 : (★★★) 

Caractériser les matrices carrées de rang 1 et leurs puissances.

III Changements de bases

Exercice 14 : 

Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_1$ à la base $\mathcal{B}_2$, où :

$$\mathcal{B}_1 = ((1, 2, 1), (2, 3, 3), (3, 7, 1)),$$

$$\mathcal{B}_2 = ((3, 1, 4), (5, 3, 2), (1, -1, 7)).$$

Exercice 15 : (★) Donner la matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection sur le plan d'équation $x + y - z = 0$ parallèlement à la droite $\text{Vect}(1, 1, 1)$. Comment vérifier le résultat obtenu ?

Exercice 16 : (★)

On considère la base $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$.

1. Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2))$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
3. Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.
4. Soit u l'endomorphisme de dérivation, c'est-à-dire $u: \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X], P \mapsto P'$. Déterminer la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ puis la matrice de u dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 17 : (★) On note $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B} = ((1, -1, 1), (2, -1, 1), (2, -2, 1))$. On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\begin{array}{ccc} u: \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x + 4y + 4z, -x - 3y - 3z, 2y + 3z) \end{array}$$

1. Vérifier que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(u)$. On note $A = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(u)$.
3. Déterminer $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. On note $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.
4. Calculer A^{4n} pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 18 : (★★)

On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 6 & 0 \\ -20 & -10 & 0 \\ -6 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. (a) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, déterminer $f(x, y, z)$.
(b) Déterminer une base de $\text{Ker } f$ et une base de $\text{Im } f$.
(c) La matrice A est-elle inversible ?
2. On pose $e_1 = (1, -2, 0)$, $e_2 = (-3, 5, 1)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ et $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$.
(a) Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
(b) Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$ et la matrice de passage Q de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$.
(c) Déterminer $D = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$.
(d) Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, A^n = P D^n P^{-1}.$$

(e) Déterminer A^n , pour $n \in \mathbb{N}^*$.
(f) En déduire f^n , pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 19 : (★★) ✎

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et u l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A .

1. Montrer que $\text{Ker}(u - id_E)$, $\text{Ker}(u - 2id_E)$ et $\text{Ker}(u + 4id_E)$ sont de dimension 1 et en donner des bases.
2. Donner e_1, e_2 et e_3 des vecteurs non nuls de chacun des noyaux précédents. Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de E .
3. Donner la matrice D de u dans cette base. Justifier qu'il existe $P \in GL_3(\mathbb{R})$ (que l'on explicitera) telle que $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP^{-1}$.

Exercice 20 : (★★) ✎

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, soit $r \leq \min(n, p)$.

On pose :

$$J_r = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0_{r,p-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{array} \right) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}).$$

Montrer que :

$$\text{rg}(A) = r \Leftrightarrow \exists P \in GL_p(\mathbb{K}), \exists Q \in GL_n(\mathbb{K}), A = QJ_rP.$$

Exercice 21 : (★★) ✎

Soit A la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que A est semblable à :

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

puis exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n .