Exercices du chapitre 1 : Rudiments de logique, généralités et révisions sur les suites et les fonctions

I Bases des mathématiques

Exercice 1 : ($\star$)
Déterminer les valeurs de $n \in \mathbb{N}$ pour lesquelles $\dfrac{2n^2-n-6}{n+3} \in \mathbb{Z}$.

II Quantificateurs

Exercice 2 :
Examiner la vérité des propositions suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ x+y^2=0$,
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\ x+y^2=0$,
3. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ x+y^2=0$,
4. $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\ x+y^2=0$,
5. $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R},\ x+y^2=0$.

Exercice 3 :
Les propriétés suivantes sont-elles vraies ou fausses ? On justifiera les réponses.

1. $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ x^2 \leq x^4$,
2. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ y^2 > x$,
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\ x+y>0$,
4. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ x+y>0$.

Exercice 4 : ($\star$)
Examiner la vérité de la proposition suivante, ainsi que celles que l'on peut obtenir en permuttant les quantificateurs :

$$\exists x \in \mathbb{R}^*,\ \forall y \in \mathbb{R}^*,\ \forall z \in \mathbb{R}^*,\ z = xy.$$

Exercice 5 :
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sqrt{n^2+1} \notin \mathbb{N}.$$

Exercice 6 : ($\star$)
Soit $n \in \mathbb{Z}$, montrer que $\dfrac{21n-3}{4}$ et $\dfrac{15n-2}{4}$ ne sont pas simultanément dans $\mathbb{Z}$.

III Généralités sur les suites et les fonctions

Exercice 7 :
Après avoir déterminé les ensembles de définition, étudier la parité des fonctions définies par :

1. $f_1(x) = \dfrac{1}{x-\dfrac{1}{x}}$
2. $f_2(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$
3. $f_3(x) = \dfrac{(x-1)^2+(x+1)^2}{(x-1)^2-(x+1)^2}$

Exercice 8 :
Soient $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

a. Montrer que, si f est paire, alors $g \circ f$ est paire.
b. Montrer que si f est impaire et g est impaire, alors $g \circ f$ est impaire.
c. Montrer que si f est impaire et g est paire, alors $g \circ f$ est paire.

IV Logique

Exercice 9 : ($\star$)
Soient $a, b \in \mathbb{R}$, montrer que : $a^2+ab+b^2=0 \Rightarrow a=b=0$.

Exercice 10 : ($\star$)
Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que : $(\forall \varepsilon > 0, |a| \leq \varepsilon) \Rightarrow a = 0$.

Exercice 11 : ($\star$)
Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que : $x \notin \mathbb{Q} \Rightarrow 1+x \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 12 : ($\star$)
Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que : $(\forall \varepsilon > 0, a < b+\varepsilon) \Rightarrow a \leq b$.

Exercice 13 : ($\star$)
Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que : $x+y \notin \mathbb{Q} \Longrightarrow (x \notin \mathbb{Q}$ ou $y \notin \mathbb{Q})$.

Exercice 14 : (⋆⋆)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soient $x_1, \dots, x_n, M \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$x_1 + \cdots + x_n > M \Longrightarrow \max(x_1, \dots, x_n) > \frac{M}{n}.$$

Exercice 15 : (⋆⋆)

1. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)$ est pair.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$, traduire en termes logiques la propriété : "n est divisible par 8".
2. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   On considère la propriété P suivante :

   "si $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 8, alors l'entier n est pair".

   (a) Ecrire la contraposée de P.
   (b) Prouver, par un raisonnement direct, la contraposée de P.
   (c) Que peut-on en déduire pour P ?

Exercice 16 : (⋆⋆)
Soit $m \in \mathbb{R}$, montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R},\ mx + 1 \geq 0) \Leftrightarrow m = 0.$$

V Monotonie

Exercice 17 : (⋆)
On considère la suite définie par :

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 35}.$$

1. Montrer que (u_n) est majorée par 7.
2. Montrer que (u_n) est croissante.

Exercice 18 : (⋆⋆)
Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction strictement croissante. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (f \circ f(x) = x \Leftrightarrow f(x) = x).$$

Exercice 19 : (⋆⋆)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f \circ f$ est croissante et $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante. Montrer que f est strictement décroissante.

VI Systèmes linéaires

Exercice 20 :
Résoudre le systèmes suivant d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = -1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ 3x + 4y - 5z = -4 \end{cases}$$

Exercice 21 :
Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Résoudre le systèmes suivant d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 3x + y - z = 1 \\ 5x + 2y - 2z = a \\ 4x + y - z = b \end{cases}$$

Exercice 22 :
Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre le systèmes suivant d'inconnues $x, y, \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} mx + (m-1)y = m + 2 \\ (m+1)x - my = 5m + 3 \end{cases}$$

Exercice 23 : (⋆)
Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre le système suivant d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + y + (2m-1)z = 1 \\ mx + y + z = 1 \\ x + my + z = 3(m+1) \end{cases}$$

Exercice 24 : (⋆)
Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre le système suivant d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x - my + m^2 z = m \\ mx - m^2 y + mz = 1 \\ mx + y - m^3 z = 1 \end{cases}$$

VII Principe de récurrence

Exercice 25 :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n - n. \end{cases}$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n + n + 1.$$

Exercice 26 :
Montrer que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7.

Exercice 27 :
Montrer que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $7^n - 1$ est divisible par 6.

Exercice 28 : (⋆⋆)
Montrer que :

1. pour tout $n \geq 2$, $2^{2^n} - 6$ est divisible par 10,
2. la somme des cubes de trois entiers consécutifs est divisible par 9.

VIII Suites arithmétiques, suites géométriques, suites arithmético-géométriques

Exercice 29 : (⋆)
On considère la suite définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{2+3u_n}.$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
   On pose alors :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{1}{u_n}.$$
2. Montrer que (v_n) est arithmétique.
3. En déduire l'expression de v_n en fonction de n puis celle de u_n en fonction de n.

Exercice 30 : (⋆)
On considère la suite définie par :

$$u_0 = 5 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1}.$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 2$.
   On pose alors :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{u_n - 1}{u_n - 2}.$$
2. Montrer que (v_n) est géométrique.
3. En déduire l'expression de v_n en fonction de n puis celle de u_n en fonction de n.

Exercice 31 :
Donner le terme général de la suite définie par :

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2.$$

Exercice 32 :
Donner le terme général de la suite définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -u_n + 4.$$

Exercice 33 : (⋆)
On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n - n + 2.$$

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - n.$$

Etudier (v_n) et en déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_n en fonction de n.

IX Fonctions périodiques

Exercice 34 : (⋆)
Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $T_1, T_2 \in \mathbb{Z}^*$ tels que f est périodique de période T_1 et g est périodique de période T_2.
Montrer que $f + g$ est périodique.

X Autres principes de récurrence

Exercice 35 :
On définit la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_1 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n. \end{cases}$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \left(\frac{5}{3}\right)^n.$$

Exercice 36 :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 0 \\ u_2 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n. \end{cases}$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n(n-1).$$

Exercice 37 : (⋆)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \frac{u_n + u_{n+1}}{2} + 1. \end{cases}$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

Exercice 38 : (⋆⋆)
Soit $x \in \mathbb{R}^*$ tel que $x + \dfrac{1}{x} \in \mathbb{Z}$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}.$$

Exercice 39 : (⋆)
On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{n+1}(u_0^2 + u_1^2 + \cdots + u_n^2).$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1.$$

Exercice 40 : (⋆⋆)
Soit (u_n) la suite vérifiant :

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \begin{cases} 2u_{\frac{n}{2}} + 1 & \text{si } n \text{ pair} \\ u_n + 1 & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases}$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n.$$

Exercice 41 : (⋆ ⋆ ⋆)
Sans utiliser la décomposition en facteurs premiers, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists p, q \in \mathbb{N},\ n = 2^p(2q+1).$$

XI Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Exercice 42 :
Donner le terme général de la suite définie par :

$$u_0 = 1,\ u_1 = 9 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n.$$

Exercice 43 : (⋆)
Calculer le terme général de la suite (u_n) définie par :

$$u_0, u_1 \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \frac{1}{2}(u_{n+1} + u_n).$$

XII Raisonnement par analyse-synthèse

Exercice 44 : (⋆)
Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une unique couple (g, h) de fonctions telles que :

$$f = g + h,$$

$$\exists a \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = a,$$

$$\text{et } h(0) = 0.$$

Exercice 45 : (⋆⋆)

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une unique couple (g,h) de fonctions telles que :

$$f = g + h,$$

$$\exists a \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = ax,$$

$$\text{et } h \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ telle que } \int_0^1 h = 0.$$

Exercice 46 : (⋆⋆)

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que : $\forall g \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f \circ g = g \circ f$.

Exercice 47 : (⋆⋆)

Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ (x \neq y \text{ et } x \neq z) \Rightarrow \left(\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{f(x)-f(z)}{x-z}\right).$$

Montrer que :

$$\exists a, b \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax + b.$$