

I Généralités

Exercice 1 :  Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

$$f_1: \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \mapsto (x - y, y - z) \end{array} ,$$

$$f_2: \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto xy \end{array} ,$$

$$f_3: \begin{array}{l} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u_n) \mapsto (u_0, u_1, u_2) \end{array} ,$$

$$f_4: \begin{array}{l} E \rightarrow \mathbb{R} \\ (u_n) \mapsto \lim u_n \end{array} ,$$

où E est l'ensemble des suites réelles convergentes.

Exercice 2 :  Déterminer une base de l'image et une base du noyau de l'application linéaire suivante :

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y) \mapsto (x - y, y - x, 0)$$

Exercice 3 : (★) Montrer que l'application suivante est linéaire :

$$\begin{array}{l} \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X] \\ P \mapsto P - (X + 1)P' \end{array} .$$

Déterminer une base de son noyau et de son image.

Exercice 4 : (★) 

Déterminer une base de l'image et une base du noyau des applications linéaires suivantes :

1. $f_1: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (x - y, y - z, z - x),$
2. $f_2: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z + i\bar{z}.$

Exercice 5 : (★)

On pose $E = C^0(\mathbb{R})$ et on définit l'application φ par, pour tout $f \in E, \varphi(f) = g$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \int_0^x t f(t) dt.$$

Montrer que φ est un endomorphisme de E .

Est-il injectif? surjectif?

Exercice 6 : (★) 

Montrer qu'il existe une unique application linéaire f de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^2 telle que :

$$f(1, 0, 0) = (0, 1), f(1, 1, 0) = (1, 0), f(1, 1, 1) = (1, 1).$$

Déterminer f et calculer son noyau et son image.

Exercice 7 : 

Déterminer le rang de l'application :

$$\begin{array}{l} \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, t) \mapsto (x - y + z + t, x + 2z - t, x + y + 3z - t) \end{array} .$$

Exercice 8 : (★) Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer que :

$$|\operatorname{rg} f - \operatorname{rg} g| \leq \operatorname{rg}(f + g) \leq \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g.$$

II Endomorphismes

Exercice 9 : (★) 

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $f^2 - 5f + 6\operatorname{Id}_E = 0_E$. Montrer que :

$$E = \operatorname{Ker}(f - 2\operatorname{Id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(f - 3\operatorname{Id}_E).$$

Exercice 10 : (★★) 

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que :

$$E = \operatorname{Im} f + \operatorname{ker} f \Leftrightarrow \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f \circ f,$$

$$\operatorname{Im} f \cap \operatorname{ker} f = \{0\} \Leftrightarrow \operatorname{ker} f = \operatorname{ker} f \circ f.$$

Exercice 11 : (★) Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont stables par g .

Exercice 12 :  Soit $E = \mathbb{R}^3$. On pose $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (1, 1, 0)$, $e_3 = (1, 2, 3)$, $F = \text{Vect}(e_1, e_2)$ et $G = \text{Vect}(e_3)$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .
2. Donner l'expression du projecteur p sur F parallèlement à G .
3. Donner l'expression du projecteur q sur G parallèlement à F .

Exercice 13 : (★★) Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, soient p et q des projecteurs de E .

1. Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.
2. Montrer que dans ce cas :

$$\text{Im}(p + q) = \text{Im } p \oplus \text{Im } q \text{ et } \text{Ker}(p + q) = \text{Ker } p \cap \text{Ker } q.$$

Exercice 14 : (★)  

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, soient p et q des projecteurs de E tels que $p \circ q = 0$.

1. Montrer que $r = p + q - q \circ p$ est un projecteur.
2. Montrer que :

$$\text{Ker } r = \text{Ker } p \cap \text{Ker } q, \text{Im } r = \text{Im } p \oplus \text{Im } q$$

III Applications linéaires en dimension finie

Exercice 15 :  

On pose $E = \mathbb{R}^3$, $F = \text{Vect}(1, 0, 0)$ et $G = \text{Vect}((1, 1, 0), (1, 1, 1))$.

Montrer qu'il existe une unique application $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que :

$$\forall u \in F, f(u) = 2u \text{ et } \forall v \in G, f(v) = -v.$$

Déterminer cette application linéaire.

Exercice 16 : (★)

Donner une base de l'espace des suites à termes complexes vérifiant la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n.$$

Exercice 17 : (★★)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soient a_1, \dots, a_{n+1} des éléments deux à deux distincts de \mathbb{K} .

1. On considère l'application :

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{K}_n[X] &\rightarrow \mathbb{K}^{n+1} \\ P &\mapsto (P(a_1), \dots, P(a_{n+1})) \end{aligned}$$

Montrer que φ est un isomorphisme.

2. On note (e_1, \dots, e_{n+1}) la base canonique de \mathbb{K}^{n+1} . Pour $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$, on pose $L_k = \varphi^{-1}(e_k)$.

Montrer que (L_1, \dots, L_{n+1}) est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ et donner l'expression de L_k en fonction de a_1, \dots, a_{n+1} .

3. Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$, déterminer les coordonnées de P dans la base (L_1, \dots, L_{n+1}) .

Exercice 18 : (★★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\forall Q \in \mathbb{R}_n[X], \exists ! P \in \mathbb{R}_n[X], Q = \sum_{i=0}^n P^{(i)} \left(\frac{X}{2^i} \right).$$

Exercice 19 : (★) 

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que $\alpha \neq \beta$. Montrer que :

$$\forall A \in \mathbb{C}[X], \exists ! P \in \mathbb{C}[X], P(X - \alpha) + P(X - \beta) = A.$$

Exercice 20 : (★★)  

Soit $p \in \mathbb{N}$, posons :

$$E = \{P \in \mathbb{R}[X], P(0) = 0\}, E_p = \{P \in E, \text{deg } P \leq p\},$$

$$F_p = \{P \in \mathbb{R}[X], \text{deg } P < p\}.$$

1. Montrer que E, E_p et F_p sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[X]$ et que E et F_1 sont supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit $\Delta : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X], P \mapsto P(X+1) - P(X)$.
 - (a) Préciser le degré de $\Delta(P)$ en fonction du degré de P .
 - (b) Montrer que Δ est linéaire et préciser son noyau.
3. Montrer que Δ induit un isomorphisme de E sur $\mathbb{R}[X]$.

IV Théorème du rang

Exercice 21 : (★) Soient E, F, G des \mathbb{K} -espaces vectoriels de même dimension n , soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer que :

$$\text{rg } f + \text{rg } g - n \leq \text{rg}(g \circ f) \leq \inf(\text{rg } f, \text{rg } g).$$

Exercice 22 : (★★) Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n . Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{Im } u = \text{Ker } u$ si et seulement si n est pair.

Exercice 23 : (★★)  

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n , soient F et G des sous-espaces vectoriels de E . Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{Im } u = F$ et $\text{ker } u = G$.

Exercice 24 : (★★★) ✨

Soient E et F des \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie, soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. On suppose que :

$$\forall g \in \mathcal{L}(F, E), f \circ g \circ f = 0 \Rightarrow g = 0.$$

Montrer que f est bijective.

2. Calculer, en fonction de $p = \dim E$, $n = \dim F$ et $r = \operatorname{rg} f$ la dimension de :

$$H = \{g \in \mathcal{L}(F, E), f \circ g \circ f = 0\}.$$

V Formes linéaires et hyperplans en dimension finie

Exercice 25 : (★)

Pour tout $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle trace de M et on note $\operatorname{tr}(M)$ le nombre :

$$\operatorname{tr}(M) = \sum_{i=1}^n m_{i,i}.$$

1. Montrer que l'application $\operatorname{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}, M \mapsto \operatorname{tr}(M)$ est une forme linéaire.

2. Déterminer la dimension de :

$$\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \operatorname{tr}(M) = 0\}.$$

Exercice 26 : (★) Soient f et g des formes linéaires telles que : $\forall x \in E, f(x).g(x) = 0$. Montrer que :

$$f = 0 \text{ ou } g = 0.$$

Exercice 27 : (★★) Soit E de dimension finie. Soit H un hyperplan de E et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Supposons que H soit stable par u . Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que :

$$\operatorname{Im}(u - \lambda \operatorname{Id}_E) \subset H.$$

Exercice 28 : (★★) ✨

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension $n \geq 2$. Soient H_1 et H_2 des hyperplans distincts de E . Déterminer :

$$\dim(H_1 \cap H_2).$$