Exercices du chapitre 18 : Intégration

I Révisions de calcul intégral

Exercice 1 : Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_{-1}^{1}(t^2+t+1)e^{-t}dt$
2. $\int_{1}^{e} t^n ln(t)dt$ où $n\in\mathbb{N}$
3. $\int_0^2 \frac{\text{Arcsin}\left(\frac{t}{2}\right)}{\sqrt{4-t^2}}dt$

Exercice 2 : Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_1^2(\ln t)^2 dt$
2. $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}dt$
3. $\int_1^e \frac{\ln(t)}{t+t(\ln t)^2}dt$

Exercice 3 :
Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $u_n=\int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!}e^x dx$.

1. Calculer u_0 et u_1. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=u_{n-1}-\frac{1}{n!}$.
2. Montrer que la suite (u_n) est monotone et convergente et calculer sa limite.
3. En déduire que :
$$e=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}.$$

Exercice 4 :
Calculer :
$$\int_{\sqrt{2}}^{2}\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx.$$

Exercice 5 :
Calculer :
$$\int_0^1\frac{1}{(1+x^2)^3}dx.$$

II Intégrale d'une fonction continue sur un segment

Exercice 6 :
Calculer :
$$\int_{-1}^{2}x|x|dx \text{ et } \int_{-1}^{1}x|x|dx.$$

Exercice 7 : Calculer :
$$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x^3}\frac{dt}{(\ln t)^2}.$$

Exercice 8 : (★★)
Calculer :
$$\lim_{x\to0}\int_x^{3x}\frac{\cos t}{t}dt.$$

Exercice 9 : (★★)
Soit f une fonction continue et positive sur $[a,b]$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose :
$$I_n=\left(\int_a^b f(x)^n dx\right)^{\frac{1}{n}}.$$
Montrer que la suite (I_n) converge vers $M=\max_{x\in[a,b]}f(x)$.

Exercice 10 : (★★)
Soit $f\in\mathcal{C}^0([0,+\infty[)$ telle que $\lim_{x\to+\infty}f(x)=l\in\mathbb{R}$.
Soit $F:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$. Montrer que :
$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=l.$$

Exercice 11 : (★)
Soient f et g deux fonctions continues sur $[0,1]$ telles que :
$$\forall x\in[0,1],\ f(x)=\int_0^x g(t)dt \text{ et } g(x)=\int_0^x f(t)dt.$$
Montrer que f et g sont égales à la fonction constante nulle.

Exercice 12 : ($\star\star$)
Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ telle que :

$$\int_0^1 f(t)\,dt = 0 \text{ et } \int_0^1 t f(t)\,dt = 0.$$

Montrer que f s'annule au moins deux fois sur $]0,1[$.

Exercice 13 : ($\star$) Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$ telle que $\int_0^1 f^2 = \int_0^1 f^3 = \int_0^1 f^4$. Calculer $\int_0^1 (f^2 - f)^2$. En déduire toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$ vérifiant $\int_0^1 f^2 = \int_0^1 f^3 = \int_0^1 f^4$.

Exercice 14 : ($\star\star$)
Soit f continue sur $[a,b]$. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \int_a^b x^k f(x)\,dx = 0.$$

Montrer que f admet au moins $n+1$ zéros sur $]a,b[$.

Exercice 15 : ($\star\star$)

1. Soient $a < b$, soit f continue sur $[a,b]$, soit g continue sur $[a,b]$ et positive. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $\int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(c)\int_a^b g(t)\,dt$.
2. Soit f continue au voisinage de 0.
   (a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x t f(t)\,dt$.
   (b) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} \displaystyle\int_x^{2x} \frac{f(t)}{t}\,dt$.

III Sommes de Riemann

Exercice 16 :
Calculer :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$$

Exercice 17 : Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$,
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}$,
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^{\frac{k}{n}}$.

Exercice 18 : ($\star$) Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(n+k)\right)^{\frac{1}{n}}$,
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Exercice 19 : ($\star\star$)
Calculer la limite suivante :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k(n-k)}$$

IV Lien entre intégrale et primitive

Exercice 20 : ($\star$)
Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Montrer que :

$$\left(\forall \alpha,\beta \in [a,b],\ \int_\alpha^\beta f(x)\,dx = 0\right) \Rightarrow \left(\forall x \in [a,b],\ f(x) = 0\right).$$

Exercice 21 : ($\star\star$)
Soit f continue et positive sur $\mathbb{R}^+$.
On suppose qu'il existe un nombre réel k positif tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ f(x) \leq k\int_0^x f(t)\,dt.$$

Montrer que f est nulle.

Exercice 22 : ($\star$)
Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. On considère la fonction F définie par :

$$\forall x \in [0,1],\ F(x) = \int_0^1 \min(x,t) f(t)\,dt.$$

1. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$.
2. Calculer F' et en déduire que :

$$\forall x \in [0,1],\ F(x) = \int_0^x \left(\int_u^1 f(t)\,dt\right) du.$$

Exercice 23 : ($\star\star\star$)
Soient $f, g \in \mathcal{C}^0([0,+\infty[,\mathbb{R})$, $f \geq 0$, $g \geq 0$ et soit $C > 0$ tel que :

$$\forall x \in [0,+\infty[,\ f(x) \leq C + \int_0^x fg.$$

Montrer que :

$$\forall x \in [0,+\infty[,\ f(x) \leq C \exp\left(\int_0^x g\right).$$

V Inégalité de Taylor-Lagrange

Exercice 24 :

Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{|x|^{n+1} e^{|x|}}{(n+1)!}$$

Exercice 25 : (⋆)

Montrer que :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

Exercice 26 : (⋆⋆)

Soit $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.

Montrer que pour $x \in [-a, a]$ on a $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{2a}|f(a) - f(-a)| + \dfrac{a^2 + x^2}{2a} \sup\limits_{t \in [-a,a]} |f''(t)|$.