Exercices du chapitre 17 : Espaces vectoriels

I Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

Exercice 1 : Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels pour les lois usuelles?

1. $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ -x+3y+z=0\}$,
2. $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ xy = zt\}$,
3. $G = \{(x,x+y,x+y+z) \in \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$,
4. $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ a,b \in \mathbb{R} \right\}$.

Exercice 2 : Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels pour les lois usuelles?

1. $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x=y\}$,
2. $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+y+z=0 \text{ et } x-3y=0\}$,
3. $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ xy \geq 0\}$,
4. $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ a+b+c+d=0 \right\}$.

Exercice 3 : ($\star$)
Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels :

1. $E_1 = \{P \in \mathbb{R}[X],\ P(0) = P(1)\}$,
2. $E_2 = \{f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}),\ \int_0^1 f(t)\,dt = 0\}$,
3. $E_3 = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 3u_{n+1} + 2u_n\}$.

Exercice 4 : ($\star$) On définit les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ 2x+y-z=0\},\ F = \{(x,x,-x) \in \mathbb{R}^3,\ x \in \mathbb{R}\}.$$

1. Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et déterminer $E \cap F$.
2. On pose $u = (1,-1,1)$ et $v = (3,1,7)$. Montrer que $\mathrm{Vect}(u,v) \subset E$. A-t-on égalité?

Exercice 5 : ($\star\star$)
Soient F, G, H des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Comparer :

1. $F \cap (G+H)$ et $(F\cap G) + (F \cap H)$,
2. $F + (G\cap H)$ et $(F+G)\cap(F+H)$.

Montrer que :

$$F \cap (G + (F\cap H)) = (F\cap G) + (F \cap H).$$

Exercice 6 :
On pose :

$$F = \{(x,2x,3x),\ x \in \mathbb{R}\} \text{ et } G = \{(x+y,x+y,y),\ x,y \in \mathbb{R}\}.$$

Montrer que :

$$\mathbb{R}^3 = F \oplus G.$$

Exercice 7 : ($\star\star$)
Soit $E = \mathbb{R}^4$. On pose $u_1 = (1,0,0,0)$, $u_2 = (1,1,0,0)$, $u_3 = (1,1,1,0)$, $u_4 = (1,1,1,1)$, $F = \mathrm{Vect}(u_1,u_2)$ et $G = \mathrm{Vect}(u_3,u_4)$.

1. Montrer que $F = \{(x,y,z,t) \in E,\ z=t=0\}$ et $G = \{(x,y,z,t) \in E,\ x-y=0 \text{ et } x+y-2z=0\}$.
2. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Exercice 8 : ($\star\star$)
Soit $E = \mathbb{R}^3$

1. (a) Soit $E_1 = \mathrm{Vect}\{(0,1,1),(1,0,2)\}$. Trouver $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $E_1 \oplus \mathrm{Vect}(x) = E$.
   (b) Même question avec $E_2 = \mathrm{Vect}\{(1,2,3),(2,2,0)\}$.
2. (a) Soit $E_3 = \mathrm{Vect}\{(1,2,2)\}$. Trouver $x,y \in \mathbb{R}^3$ tel que $E_3 \oplus \mathrm{Vect}\{x,y\} = E$.
   (b) Même question avec $E_4 = \mathrm{Vect}\{(1,0,1)\}$.

Exercice 9 : ($\star\star$)
Soit E l'ensemble des suites convergentes.
On considère F l'ensemble des suites réelles tendant vers 0 et G l'ensemble des suites réelles constantes.

1. Montrer que F et G sont des espaces vectoriels.
2. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.

Exercice 10 : ($\star\star$)
On pose :

$$E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}),$$

$$F = \{f \in E, \int_0^1 f = 0, f(0) = 0, f'(1) = 0\},$$

$$G = \{x \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2, a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Exercice 11 : (⋆⋆⋆)
Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ et soient p réels $(a_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ deux à deux distincts dans $[0,1]$. On pose :

$$F = \{f \in E, \forall i \in [\![1,p]\!], f(a_i) = 0\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Déterminer un supplémentaire de F dans E.

II Familles finies de vecteurs

Exercice 12 :
Les familles suivantes de $\mathbb{R}^3$ sont-elles libres ou liées ?

1. $x_1 = (1,1,0)$, $x_2 = (0,1,1)$
2. $x_1 = (0,0,1)$, $x_2 = (0,1,1)$, $x_3 = (1,1,1)$
3. $x_1 = (0,1,-1)$, $x_2 = (1,0,-1)$, $x_3 = (1,-1,0)$
4. $x_1 = (1,1,-1)$, $x_2 = (1,-1,1)$, $x_3 = (-1,1,1)$, $x_4 = (1,1,1)$

Exercice 13 :
Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, soient $f_1 : x \mapsto |x|$, $f_2 : x \mapsto |x-1|$ et $f_3 : x \mapsto |x+1|$.
Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3) est libre.

Exercice 14 : (⋆) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soient $a, b, c \in E$. On pose :

$$u = b + c,\ v = c + a,\ w = a + b.$$

Montrer que :

$$(a,b,c) \text{ est libre} \Leftrightarrow (u,v,w) \text{ est libre.}$$

Exercice 15 : (⋆) Les familles suivantes de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ sont-elles libres ou liées ?

1. $f_1 : x \mapsto \cos x$, $f_2 : x \mapsto \sin x$, $f_3 : x \mapsto 1$,
2. $f_1 : x \mapsto \cos^2 x$, $f_2 : x \mapsto \cos 2x$, $f_3 : x \mapsto 1$,

Exercice 16 : (⋆)
On définit les suites (u_n), (v_n) et (w_n) par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1,\ v_n = n^2,\ w_n = 2^n.$$

Montrer que la famille $((u_n),(v_n),(w_n))$ est libre.

Exercice 17 : (⋆⋆)
Les familles suivantes de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ sont-elles libres ou liées ?

1. $f_i : x \mapsto e^{\lambda_i x}$, avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$,deux à deux distincts,
2. $f_k : x \mapsto \sin kx$, $k \in [\![1,n]\!]$.

Exercice 18 : (⋆⋆)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille libre de E et soit $(\lambda_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille de scalaires. Soit $u = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ et pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $v_i = u + e_i$.
Montrer que $(v_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est liée si et seulement si $\sum_{i=1}^n \lambda_i = -1$.

Exercice 19 : (⋆⋆)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $\mathcal{E} = (e_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ et $\mathcal{F} = (f_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ deux familles libres de vecteurs de E. On suppose que, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $f_i \in F_i$ où $F_i = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_i)$. Montrer que :

$$\forall i \in [\![1,p]\!],\ e_i \in E_i \text{ où } E_i = \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_i).$$

Exercice 20 : Montrer que $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, 2x - y + z = 0\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et en donner une base.

Exercice 21 : (⋆)
Déterminer une base de :

$$E = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(1) = P(2) = 0\}.$$

Exercice 22 : (⋆)
Déterminer une base des espaces vectoriels suivants :

1. $F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y + z = 0 \text{ et } 2x + y + 3z = 0\}$
2. $F_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, x + 3y - z = t\}$
3. $F_3 = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(X^2) = (X^3 + 1)P(X)\}$.

Exercice 23 :
Soient $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $a \neq b$. On pose :

$$E = \{P \in \mathbb{C}_4[X], P(a) = 0, P(b) = 0\}.$$

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}_4[X]$ et déterminer une base de E.

III Espaces vectoriels de dimension finie

Exercice 24 :
Déterminer une base et la dimension des espaces vectoriels suivants :

1. $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ -x+3y+z=0\}$
2. $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x+y+z=0 \text{ et } x-3y=0\}$
3. $\{P\in\mathbb{R}_2[X],\ P(0)=0\}$
4. $\left\{\begin{pmatrix} a & b & 0\\ b & a & 0\\ c & 0 & a+b\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$
5. $\{f\in\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=ae^x+bx, a,b\in\mathbb{R}\}$

Exercice 25 :
Déterminer une base et la dimension des espaces vectoriels suivants :

1. $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x-2y+3z=0\}$
2. $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x=2y=3z\}$
3. $\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4,\ x+y=0, y+z=0, z+t=0, t+x=0\}$
4. $\{P\in\mathbb{R}_4[X],\ P(1)=0\}$

Exercice 26 : **($\star$)** On pose :

$$F=\{(x,y,z)\in\mathbb{C}^3, x+y+z=0 \text{ et } x+iy-z=0\}.$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^3$ et en déterminer une base et sa dimension.

Exercice 27 : **($\star$)**
Compléter en une base de $\mathbb{R}^4$ la famille (e_1,e_2) avec :

$$e_1=(1,1,1,1)\quad e_2=(1,1,-1,-1).$$

Exercice 28 : Déterminer le rang des familles suivantes :

1. $x_1=(1,-1,1)$, $x_2=(-1,1,-1)$, $x_3=(0,1,1)$, $x_4=(1,0,2)$,
2. $x_1=(1,1,0,1)$, $x_2=(1,-1,1,0)$, $x_3=(2,0,1,1)$, $x_4=(0,-2,1,-1)$,
3. $x_1=(1,0,2,3)$, $x_2=(7,4,2,-1)$, $x_3=(5,2,4,7)$.

Exercice 29 : Déterminer le rang des familles suivantes de $\mathbb{R}^4$:

1. $x_1=(0,1,1,1)$, $x_2=(1,0,1,1)$, $x_3=(1,1,0,1)$, $x_4=(1,1,1,0)$,
2. $x_1=(0,1,0,1)$, $x_2=(1,-1,1,-1)$, $x_3=(1,-1,-1,1)$, $x_4=(1,1,1,1)$.

Exercice 30 : **($\star$)** Déterminer le rang des familles suivantes de $\mathbb{R}[X]$:

1. $(3, X^2+1, X^5-3X^2+2)$,
2. $\left(X^k(X-1)^{n-k}\right)_{k\in[\![0,n]\!]}$.

IV Sous-espaces d'un espace vectoriel de dimension finie

Exercice 31 :
Posons $F=\mathrm{Vect}(1, X+1, X^3-X^2)$. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 32 : **($\star$)**
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ des familles finies de E.
Montrer que :

$$\mathrm{rg}(\mathcal{F}\cup\mathcal{F}')\leq \mathrm{rg}(\mathcal{F})+\mathrm{rg}(\mathcal{F}').$$

Exercice 33 : **($\star$)** Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs suivants : $u=(1,0,1,0)$, $v=(0,1,-1,0)$, $w=(1,1,1,1)$, $x=(0,0,1,0)$, $y=(1,1,0,-1)$. On pose $F=\mathrm{Vect}(u,v,w)$ et $G=\mathrm{Vect}(x,y)$.
Quelles sont les dimensions de F, G, $F\cap G$?

Exercice 34 : **($\star\star$)**
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soit une famille de n vecteurs de E de rang s. Etant donnée une sous-famille de r vecteurs de rang s', montrer que $s'\geq r+s-n$.

Exercice 35 : **($\star\star$)**
On pose :

$$E=\{(x_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \forall n\in\mathbb{N},\ x_{n+3}-x_{n+2}-x_{n+1}+x_n=0\},$$

$$F=\{(x_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \forall n\in\mathbb{N},\ x_{n+1}+x_n=0\},\ G=\{(x_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \forall n\in\mathbb{N},\ x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n=0\}.$$

1. Montrer que :

$$E=F\oplus G.$$

2. En déduire $\dim E$.