PCSI 1

Exercices du chapitre 15 : Polynômes

2024/2025

I L'ensemble $\mathbb{K}[X]$

Exercice 1 : ($\star$)

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose : $P = \sum_{k=0}^{n} X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k X^k$. Calculer :
$$\deg(P+Q).$$
2. Soit $n \geq 2$, on pose : $P = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 X^k$ et $Q = X^n + (-1)^n n^2 X^{n-1} + X^{n-2}$. Calculer :
$$\deg(P-Q).$$

Exercice 2 : ($\star$) Déterminer l'ensemble des $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que :
$$P(X^2) = (X^2+1)P(X).$$

II Divisibilité et division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$

Exercice 3 :
Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que :
$$X^2 | (X+1)^n - nX - 1.$$

Exercice 4 : ($\star\star$) Montrer que pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P - X$ divise $P \circ P - X$.
En déduire les solutions $x \in \mathbb{R}$ de :
$$(x^2 - 3x + 1)^2 = 3x^2 - 8x + 2.$$

Exercice 5 : Effectuer la division euclidienne de A par B avec :

1. $A = X^4 + 2X^3 - X + 6$, $B = X^3 - 6X^2 + X + 4$,
2. $A = iX^3 - X^2 + 1 - i$, $B = (1+i)X^2 - iX + 3$,

Exercice 6 : Effectuer la division euclidienne de A par B avec :

1. $A = 2X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 5X + 6$, $B = X^2 - 3X + 1$,
2. $A = X^3 - iX^2 - X$, $B = X - 1 + i$,

Exercice 7 : ($\star$)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $A = X^{2n} - X^2 + 1$ et $B = X^2 - X$.
Déterminer le reste de la division euclidienne de A par B.

Exercice 8 : ($\star\star$)
Soient $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}^*$, q et r le quotient et le reste de la division euclidienne de n par p et soit $a \in \mathbb{K}^*$.

1. Montrer que le reste de la division euclidienne de X^n par $X^p - a$ est $a^q X^r$.
2. Calculer le reste de la division euclidienne de $X^n - a^n$ par $X^p - a^p$.
3. Calculer le reste de la division euclidienne de $X^{12} + 8X^{11} + 5X^6 - 3X^4 + X^2 - 5$ par $X^3 - 1$.

III Evaluation polynomiale et racines

Exercice 9 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que :
$$X^2 - 3X + 2 | (X-2)^{2n} + (X-1)^n - 1.$$

Exercice 10 : ($\star$)
Déterminer les couples $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que :
$$X^2 + 1 | X^4 + X^3 + aX^2 + bX + 1.$$

Exercice 11 : ($\star\star$)
Résoudre l'équation d'inconnues $P, Q \in \mathbb{C}[X]$:
$$(X^2 - 5X + 7)P + (X-2)Q = (2X-3).$$

Exercice 12 : ($\star\star$)
On définit une suite de polynômes par :
$$T_0 = 1,\ T_1 = X,$$
$$\forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

1. Déterminer le degré et le coefficient dominant de T_n.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que T_n est l'unique polynôme vérifiant :

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta).$$

3. Déterminer les racines de T_n.

Exercice 13 :
Déterminer tous les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ dont la fonction polynomiale associée est périodique.

Exercice 14 :
Soit (S) le système :

$$\begin{cases} 3x + 4xy + 3y &= -5 \\ x - 2xy + y &= 5 \end{cases}$$

1. Déterminer la valeur de la somme $s = x + y$ et du produit $p = xy$ de tout couple (x, y) de solutions de (S).
2. Résoudre (S).

IV Dérivation dans $\mathbb{K}[X]$

Exercice 15 :
Soit $n \geq 1$. Soit P un polynôme de degré n.
Déterminer le degré des polynômes $Q = X^2P' + P$ et $R = XP' + P$.

Exercice 16 : ($\star$)
Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que :

$$XP'' + X^2P' = 2X^3 - X^2 + 2X.$$

Exercice 17 : ($\star\star$)
Déterminer l'ensemble des $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que :

$$X^2P'' + 2XP' - 2P = 0.$$

Exercice 18 : ($\star$)
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$L_n(X) = \frac{1}{2^n n!} P_n^{(n)} \text{ où } P_n = (X^2 - 1)^n.$$

1. Déterminer le degré et le coefficient dominant de L_n.
2. Calculer $L_n(1)$ et $L_n(-1)$.

Exercice 19 : ($\star\star$)
Soit $P \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$, soit $n = \deg P$. Montrer que les sommes des zéros de P, P', ..., $P^{(n-1)}$ forment une progression arithmétique.

Exercice 20 :
Soit $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que :

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ P^{(k)}(0) = k!a_k.$$

Exercice 21 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que :

$$(X-1)^2 \Big| \left(\sum_{k=0}^{n-1} X^k\right)^2 - n^2X^{n-1}$$

et

$$(X-1)^3 \Big| nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n.$$

Exercice 22 : ($\star$)
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. On pose :

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}.$$

1. Calculer $P(X) - P'(X)$.
2. Montrer que toutes les racines complexes de P sont simples.

Exercice 23 : ($\star\star$)
Soient $a, b \in \mathbb{C}$ tel que $b \neq 0$.
Trouver les polynômes de degré 5 tels que $P(X) + a$ soit divisible par $(X+b)^3$ et $P(X) - a$ soit divisible par $(X-b)^3$.

Exercice 24 : Soit $P = X^{10} - 25X^6 + 48X^5 - 25X^4 + 1 \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que 1 est racine de P et déterminer son ordre de multiplicité.

Exercice 25 : ($\star\star\star$)
Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ tels que $P = (X-1)^n - (X^n - 1)$ ait une racine double.

Exercice 26 : ($\star$) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.
Montrer que si P est scindé et $\deg(P) \geq 2$ alors P' est scindé.

V Polynômes irréductibles

Exercice 27 : (⋆⋆)
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\deg P \geq 2$. Montrer que l'application $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto P(x)$ n'est pas injective.

Exercice 28 : (⋆⋆)
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que :

$$P(X^2) = P(X-1)P(X+1).$$

1. Montrer que si α est racine de P, il existe une racine de P dont le module est strictement supérieur à $|\alpha|$.
2. En déduire le polynôme P.

Exercice 29 : (⋆⋆)

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $P_n = \sum_{k=0}^{n} X^k$. Déterminer la décomposition en polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ de P_n.
2. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de :

$$\prod_{k=1}^{n} \sin \frac{k\pi}{n+1}.$$

Exercice 30 : Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :

1. $(X^2 - X + 1)^2 + 1$,
2. $X^3 - 5X^2 + 3X + 9$,
3. $(X^2 - X + 2)^2 + (X-2)^2$,
4. $6X^5 + 15X^4 + 20X^3 + 15X^2 + 6X + 1$.

Exercice 31 : (⋆)
Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P = X^4 - 14X^2 + 24X - 8$ sachant qu'il admet une racine multiple.

Exercice 32 : (⋆) Donner la décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ de :

$$P = X^n - 1$$

Exercice 33 : (⋆)
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme :

$$X^{2n} - 2(\cos a)X^n + 1.$$

VI Introduction à la décomposition en éléments simples

Exercice 34 : Déterminer une primitive de :

$$f : x \mapsto \frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

Exercice 35 : (⋆) Déterminer une primitive de :

$$f : x \mapsto \frac{x^5}{x^4-1}.$$

Exercice 36 : (⋆)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la décomposition en éléments simples de :

$$\frac{n!}{X(X-1)\dots(X-n)}$$

Exercice 37 : (⋆)

1. Décomposer en éléments simples :

$$\frac{3X+8}{X(X+2)}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{3k+8}{k(k+2)2^k}.$$

3. En déduire la limite de la suite (S_n).

Exercice 38 : (⋆⋆)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^*$ deux à deux distincts, soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Posons :

$$P = \lambda \prod_{k=1}^{n} (X - x_k).$$

1. Montrer que :

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ P'(x_k) = \lambda \prod_{j \in [\![1,n]\!] \setminus \{k\}} (x_k - x_j).$$

2. En déduire que la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{P}$ est :

$$\frac{1}{P} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{P'(x_k)(X - x_k)}.$$

3. En déduire que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k P'(x_k)} = -\frac{1}{P(0)}.$$