# Exercices du chapitre 14 : Dérivabilité

## I Nombre dérivé, fonction dérivée

**Exercice 1 :**
Soit $I$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, soient $a \in I$ et $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ dérivable en $a$. Calculer :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h^2) - f(a+h)}{h}.$$

**Exercice 2 : ($\star$)**
Soit $f \in \mathcal{F}(]-1,1[, \mathbb{R})$ dérivable en 0, soient $(a_n)$ et $(b_n)$ des suites convergeant vers 0 et telles que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $-1 < a_n < 0 < b_n < 1$. Montrer que la suite $\left(\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}\right)$ converge vers $f'(0)$.

**Exercice 3 : ($\star$)**
Soit $f$ la fonction définie sur $]-1,1[$ par : $f(x) = \frac{x}{\ln|x|} \cos\frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1. Montrer que $f$ est dérivable sur $]-1,1[$.
2. On considère les suites définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi},\ v_n = \frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2n\pi}.$$

   Calculer les limites des suites $(f'(u_n))$ et $(f'(v_n))$.
3. En déduire que la fonction $f'$ n'est pas bornée au voisinage de 0.

**Exercice 4 : ($\star$)**
Etudier la dérivabilité en 0 des fonctions suivantes :

1. $f_1 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x^{n+1} + x^n}$, où $n \in \mathbb{N}^*$,
2. $f_2 : x \mapsto \begin{cases} x \sin\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$,
3. $f_3 : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

**Exercice 5 :**
On considère la fonction définie par :

$$\forall x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[,\ f(x) = \frac{1}{\sin(x)}.$$

1. Montrer que $f$ réalise une bijection vers un intervalle que l'on précisera.
2. Sans déterminer $f^{-1}$, montrer que $f^{-1}$ est dérivable sur un intervalle que l'on précisera et calculer $(f^{-1})'$.

## II Propriétés des fonctions dérivables

**Exercice 6 :**
Soit $T \in \mathbb{R}^*$. Soit $f$ une fonction dérivable et $T$-périodique.
Montrer que $f'$ s'annule une infinité de fois.

**Exercice 7 :**
Soit $f$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1,1]$ et deux fois dérivable sur $]-1,1[$ telle que $f(-1) = -1$, $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer que :

$$\exists c \in ]-1,1[,\ f''(c) = 0.$$

**Exercice 8 : ($\star$)**
Soient $a, b, \lambda \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b$, soit $f$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ telle que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que :

$$\exists c \in ]a,b[,\ f'(c) = -\lambda \frac{f(c)}{c}.$$

**Exercice 9 : ($\star$)** Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, soient $f, g \in \mathcal{F}([a,b], \mathbb{R})$ continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$. Montrer qu'il existe $c \in ]a,b[$ tel que :

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$

**Exercice 10 : ($\star\star$)**
Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $f$ une fonction continue sur $[a, +\infty[$ et dérivable sur $]a, +\infty[$ telle que :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = f(a).$$

On pose :

$$g : \begin{array}{rcl} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} f\left(\frac{1}{x} + a - 1\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(a) & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{array}$$

1. Montrer que $g$ est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$.

2. En déduire qu'il existe $c \in ]a, +\infty[$ tel que :
$$f'(c) = 0.$$

**Exercice 11 :** $(\star\star)$

Soit $f$ une application définie et continue sur $[a, +\infty[$, dérivable sur $]a, +\infty[$ telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = f(a)$. Montrer que :
$$\exists x_0 \in ]a, +\infty[,\ f'(x_0) = 0.$$

**Exercice 12 :** $(\star)$ Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, soient $n, k, l \in \mathbb{N}$ tels que $0 \le l \le k$ et $0 \le l \le n$, soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ $n$ fois dérivable sur $I$. On suppose que $f$ admet au moins $k$ zéros dans $I$. Montrer que $f^{(l)}$ admet au moins $k - l$ zéros dans $I$.

**Exercice 13 :** $(\star\star)$

1. Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. Montrer que :
$$\exists c \in ]a, b[,\ f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a)).$$
2. En déduire la règle de L'Hôpital : si $f$ et $g$ sont deux fonctions continues sur $V = ]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ et dérivables sur $V \setminus \{x_0\}$, telles que $f(x_0) = g(x_0) = 0$, et : $\forall x \in V \setminus \{x_0\}$, $g'(x) \neq 0$. Montrer que :
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$
3. Application : calculer les limites suivantes :
$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}.$$

**Exercice 14 :** Montrer que :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{k+1} \le \ln \frac{k+1}{k} \le \frac{1}{k}.$$

**Exercice 15 :** $(\star)$ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. Montrer que pour tout $x > 0$, il existe $c > 0$ tel que :
$$f(x) - f(-x) = x(f'(c) + f'(-c)).$$

**Exercice 16 :** $(\star)$

Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \left(\frac{1+x}{x}\right)^x \le e \le \left(\frac{1+x}{x}\right)^{x+1}.$$
En déduire :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{(n+1)^n}{n!} \le e^n \le \frac{(n+1)^{n+1}}{n!}.$$

**Exercice 17 :**

1. On définit la suite $(u_n)$ par :
$$u_0 \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2 + \frac{1}{2}\sin u_n.$$
Etudier la convergence de $(u_n)$.
2. On définit la suite $(u_n)$ par :
$$u_0 \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \cos u_n.$$
Etudier la convergence de $(u_n)$.

**Exercice 18 :** $(\star)$

Montrer les inégalités suivantes :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^+,\ x^{n+1} - (n+1)x + n \ge 0,$
2. $\forall x \in ]-1, +\infty[,\ \frac{x}{1+x} \le \ln(1+x) \le x,$
3. $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}],\ x\cos x < \frac{\pi^2}{16},$
4. $\forall (x, y) \in [0, 1[^2,\ x < y,\ \frac{y-x}{\sqrt{1-x^2}} < \operatorname{Arcsin} y - \operatorname{Arcsin} x < \frac{y-x}{\sqrt{1-y^2}}.$

**Exercice 19 :** Soit :
$$f : \begin{array}{ccc} ]0, +\infty[ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{-1/x^2} \end{array}$$
Montrer que $f$ est prolongeable par continuité en 0 et que son prolongement par continuité en 0 est dérivable en 0.

**Exercice 20 :** $(\star\star)$

Résoudre l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$ :
$$x(x-1)y' + (2x-1)y = 1.$$

**Exercice 21 :** $(\star\star)$ Résoudre l'équation différentielle suivante en utilisant la méthode de variation de la constante :
$$xy' - 2y - x^4 = 0.$$

**Exercice 22 :** $(\star\star)$

Résoudre l'équation différentielle suivante :
$$y'' + y = |x| + 1.$$

## III Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

**Exercice 23 :**
Soit $n > 2$, calculer la dérivée $n^{\text{ième}}$ de :

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (x^2+1)e^{2x} \end{array}.$$

**Exercice 24 :** Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée $n^{\text{ième}}$ de :

1. $f_1 : x \mapsto \cos^3 x$,
2. $f_2 : x \mapsto e^x \sin x$,
3. $f_3 : x \mapsto (x^3 + x^2 + 1)e^{-x}$.

**Exercice 25 : ($\star\star$)**
Calculer la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $f : x \mapsto x^n(1+x)^n$.
En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

**Exercice 26 : ($\star\star$)**
Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la dérivée $(n+1)$-ième de :

$$f_n : x \mapsto x^n e^{1/x}.$$

**Exercice 27 : ($\star\star$)**
Soit $f \in \mathcal{C}^\infty([0,1])$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1],\ |f^{(n)}(x)| \leq x.$$

Montrer que $f$ est la fonction constante nulle.

## IV Fonctions convexes

**Exercice 28 :**
Montrer que :

$$\forall x, y \in ]1, +\infty[,\ \ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(x)\ln(y)}.$$

**Exercice 29 : ($\star$)**

1. Soit $f$ une fonction convexe et majorée sur $\mathbb{R}$. Montrer que $f$ est constante.
2. Donner un exemple de fonction convexe et majorée sur $]0, +\infty[$ et qui ne soit pas constante.

**Exercice 30 : ($\star\star$)**
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ convexe. Posons :

$$g : \begin{array}{rcl} [0, \frac{1}{2}] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) + f(1-x). \end{array}$$

Montrer que $g$ est décroissante.

**Exercice 31 : ($\star\star$)**
Déterminer toutes les fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ telle que $f$ soit convexe et concave (c'est-à-dire telle que $-f$ soit convexe).

**Exercice 32 : ($\star\star\star$)**

1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \ldots, x_n \in I$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0,1]$ tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$.

   Montrer l'inégalité de Jensen :

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k).$$

2. Applications :
   (a) Montrer que, pour tout $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^+$ :

$$a_1 a_2^2 a_3^3 \leq \left(\frac{a_1 + 2a_2 + 3a_3}{6}\right)^6.$$

   (b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n \in ]0,1]$ tels que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$. Montrer que :

$$\sum_{i=1}^{n} \left(a_i + \frac{1}{a_i}\right)^2 \geq \frac{(n^2+1)^2}{n}.$$