Chapitre 7 : Nombres complexes

I Ensemble des nombres complexes

1.1 Partie réelle et partie imaginaire

La construction de l'ensemble des nombres complexes n'est pas exigible. On admettra donc le résultat suivant :

Définition-Proposition 1

Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$:
• possédant un élément noté i tel que $i^2 = -1$,
• dont tout élément s'écrit de manière unique sous la forme $z = x + iy$ avec x et y réels,
• muni d'une addition notée $+$ telle que : si $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ avec $x, y, x', y' \in \mathbb{R}$, on définit $z + z'$:

$$z + z' = (x + x') + i(y + y')$$

• muni d'une multiplication notée $\times$ ou . telle que : si $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ avec $x, y, x', y' \in \mathbb{R}$, on définit $z \times z'$ par :

$$z \times z' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$$

Remarque :
• Soit $x \in \mathbb{R}$, alors $x = x + i0$ et comme $x, 0 \in \mathbb{R}$, on a donc $x \in \mathbb{C}$. On a donc l'inclusion :

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

• Les nombres réels sont donc des nombres complexes. Dire qu'un nombre est complexe ne signifie donc pas qu'il ne soit pas réel.
• Les opérations définies sur les nombres complexes vérifient les règles connues pour les nombres réelles : si $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ avec $x, y, x', y' \in \mathbb{R}$, on a :

$$z + z' = x + iy + x' + iy' = (x + x') + i(y + y'),$$

$$z \times z' = (x + iy)(x' + iy') = xx' + ixy' + iyx' + i^2yy' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y).$$

➪ **Exemple 1 :** Posons $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2 + 3i$ et $z_3 = 4 - i$, calculer : $(z_1 + z_2)z_3$.

Définition 1

On appelle nombre imaginaire pur, tout nombre complexe de la forme iy avec $y \in \mathbb{R}$.
On note $i\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres imaginaires purs.

Définition 2

Soit $z \in \mathbb{C}$, il existe une unique couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = x + iy$. Cette écriture est appelée **écriture algébrique** ou **forme algébrique**.
De plus x est appelé **partie réelle** de z et notée $\mathrm{Re}(z)$, y est appelée **partie imaginaire** de z et notée $\mathrm{Im}(z)$.

Remarque : Les nombres réels sont les complexes de partie imaginaire nulle et les nombres imaginaires purs sont les complexes de partie réelle nulle.

Proposition 1

Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. On a :

$$\mathrm{Re}(z_1 + z_2) = \mathrm{Re}(z_1) + \mathrm{Re}(z_2) \text{ et } \mathrm{Im}(z_1 + z_2) = \mathrm{Im}(z_1) + \mathrm{Im}(z_2).$$

Corollaire 1

Soient $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, on a :

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Re}(z_k) \text{ et } \mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Im}(z_k).$$

Proposition 2

Soit $z \in \mathbb{C}$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\mathrm{Re}(\lambda z) = \lambda \mathrm{Re}(z) \text{ et } \mathrm{Im}(\lambda z) = \lambda \mathrm{Im}(z).$$

Remarque : On peut "sortir" les nombres **réels** des parties réelles et imaginaires.

➪ **Exemple 2 :** Posons $z_1 = -1 + 3i$ et $z_2 = 4 - i$. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de $z_1^2 - 2z_2$.

1.2 Conjugaison

Définition 3

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On appelle **conjugué** de z, et on note $\overline{z}$ le nombre complexe $\overline{z} = a - ib$.

Proposition 3

Soient $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a :

- $\overline{\overline{z}} = z$.
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.
- $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$.
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\overline{z}^n = \overline{z^n}$.
- si $z_2 \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

Preuve. Posons $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Posons $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$ avec $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$.

- $\overline{\overline{z}} = \overline{\overline{a + ib}} = \overline{a - ib} = a + ib = z$.
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2)} = \overline{(a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)} = a_1 + a_2 - i(b_1 + b_2) = a_1 - ib_1 + a_2 - ib_2 = \overline{z_1} + i\overline{z_2}$.
- $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{(a_1 + ib_1) \times (a_2 + ib_2)} = \overline{(a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1)} = a_1a_2 - b_1b_2 - i(a_1b_2 + a_2b_1)$.
  Or, $\overline{z_1} \times \overline{z_2} = \overline{(a_1 + ib_1)} \times \overline{(a_2 + ib_2)} = (a_1 - ib_1)(a_2 - ib_2) = a_1a_2 - b_1b_2 - i(a_2b_1 + a_1b_2) = \overline{z_1 \times z_2}$.
- En raisonnant par récurrence sur n, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\overline{z}^n = \overline{z^n}$.
- Si $z_2 \neq 0$ alors, $\overline{z_2} \neq 0$. On a alors : $1 = \overline{z_2 \times \frac{1}{z_2}} = \overline{z_2} \times \overline{\frac{1}{z_2}}$ d'où $\overline{\frac{1}{z_2}} = \frac{1}{\overline{z_2}}$.
  Puis, $\overline{\frac{z_1}{z_2}} = \overline{z_1 \times \frac{1}{z_2}} = \overline{z_1} \times \overline{\frac{1}{z_2}} = \overline{z_1} \times \frac{1}{\overline{z_2}} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

□

➪ **Exemple 3 :** Posons $z_1 = 1+i$, $z_2 = 2+3i$ et $z_3 = 4+i$.
Calculer $\overline{z_1^2 - 3z_2 + iz_3}$.

Proposition 4

Soit $z \in \mathbb{C}$, on a :

- $\operatorname{Re}(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$
- $\operatorname{Im}(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$
- $z \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\overline{z} = z$
- $z \in i\mathbb{R}$ si et seulement si $\overline{z} = -z$

Preuve. Posons $z = a+ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

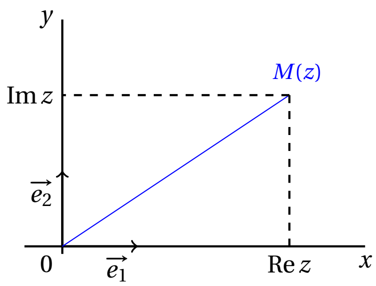
- On a $z = \operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z)$ et $\overline{z} = \operatorname{Re}(z) - i\operatorname{Im}(z)$. Donc $\dfrac{z+\overline{z}}{2} = \dfrac{\operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z) + \operatorname{Re}(z) - i\operatorname{Im}(z)}{2} = \operatorname{Re}(z)$.
- De même $\dfrac{z-\overline{z}}{2i} = \dfrac{\operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z) - \operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z)}{2i} = \operatorname{Im}(z)$
- $z \in \mathbb{R} \iff \operatorname{Im}(z) = 0 \iff \dfrac{z-\overline{z}}{2i} = 0 \iff z - \overline{z} = 0 \iff z = \overline{z}$
- $z \in \mathbb{R} \iff \operatorname{Re}(z) = 0 \iff \dfrac{z+\overline{z}}{2} = 0 \iff z + \overline{z} = 0 \iff z - \overline{z}$

□

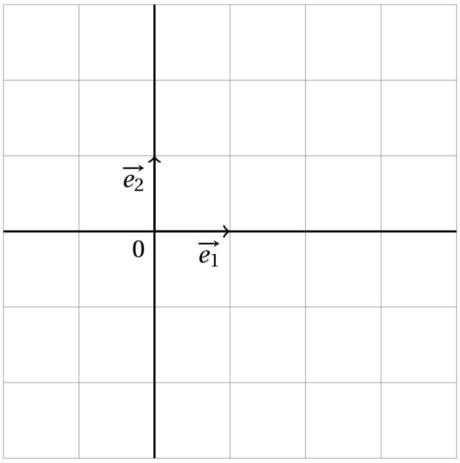
1.3 Affixe

Définition 4

On munit le plan usuel $\mathcal{P}$ d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.
A tout point M de $\mathcal{P}$ de coordonnées (x, y) (resp. à tout vecteur $\overrightarrow{u}$ tel que $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2}$) avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on associe le nombre complexe $z = x + iy$ et réciproquement. On dit que z est l'**affixe** de M (resp. $\overrightarrow{u}$) et M (resp. $\overrightarrow{u}$) est appelé image de z. On note $M(z)$ (resp. $(\overrightarrow{u}(z))$ pour exprimer que z est l'affixe de M (resp. $\overrightarrow{u}$).



➪ **Exemple 4 :** On pose $z_1 = 2i$, $z_2 = 1+i$, $z_3 = -1-2i$ et $z_4 = 3$. Représenter les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ (resp. $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{u_3}$, $\overrightarrow{u_4}$, $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$, $\overrightarrow{v_3}$, $\overrightarrow{v_4}$) d'affixes z_1 (resp. z_2, z_3, z_4, $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$, $\overline{z_3}$, $\overline{z_4}$).



Remarque : L'axe des abscisses correspond aux nombres réels et l'axe des ordonnées aux nombres imaginaires purs.
Remarque : Comme le point de coordonnées $(x,-y)$ est le symétrique du point de coordonnées (x,y) par rapport à l'axe des abscisses, la conjugaison s'interprète comme la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

1.4 Calcul algébrique

Les formules suivantes, vues dans $\mathbb{R}$ restent vraies dans $\mathbb{C}$.

Proposition 5 : Somme d'une progression géométrique

Soient $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que $N_1 \leq N_2$. Soit $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Alors :

$$\sum_{k=N_1}^{N_2} q^k = \frac{q^{N_1} - q^{N_2+1}}{1-q}.$$

Proposition 6 : Factorisation de $a^n - b^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k.$$

Théorème 1 : Formule du binôme de Newton

Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

II Module

2.1 Définition et opérations

Définition 5

On appelle module du nombre complexe $z = a + ib$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et on note $|z|$ le réel positif (ou nul) défini par

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Remarque : La notion de module prolonge celle de valeur absolue, c'est à dire que le module d'un nombre réel est égal à sa valeur absolue. En effet, si $x \in \mathbb{R}$, alors $x = x + i0$ et le module de x vaut $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2}$ qui est égal à la valeur absolue de x.
Interprétation géométrique du module :
Soit $z \in \mathbb{C}$.
Si M est le point du plan $\mathcal{P}$ d'affixe z alors $|z| = ||\overrightarrow{OM}|| = OM$.
De même, si $\vec{u}$ est le vecteur du plan d'affixe z alors $|z| = ||\vec{u}||$

Si A et B sont deux points du plan d'affixes a et b alors $|b-a| = ||\overrightarrow{AB}|| = AB$.

Cercles et disques :
Soient $\omega \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.

- L'ensemble des points du plan d'affixe z vérifiant $|z-\omega| = r$ est le cercle de centre Ω d'affixe ω et de rayon r.
- L'ensemble des points du plan d'affixe z vérifiant $|z-\omega| < r$ (resp. $|z-\omega| \leq r$) est le disque ouvert (resp. fermé) de centre Ω d'affixe ω et de rayon r.
  Le disque ouvert ne contient pas les points du cercle contrairement au disque fermé.

Proposition 7

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $|z|^2 = z\overline{z}$ et $|z| = |\overline{z}|$.

Preuve. Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$, avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Alors $z\overline{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2 = |z|^2$ et $|\overline{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2+b^2} = |z|$. □

Méthode 1 : Calcul de la forme algébrique d'un quotient

On cherche à déterminer la forme algébrique du quotient $\frac{z_1}{z_2}$, avec $z_1 \in \mathbb{C}$ et $z_2 \in \mathbb{C}^*$.
On multiple et on divise la fraction par la quantité conjugué du dénominateur :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2}.$$

Comme $|z_2|^2$ est réel, il suffit de développer le numérateur pour obtenir la forme algèbrique.

➪ **Exemple 5 :** Posons $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = 2 + 3i$, calculer la forme algèbrique de $\frac{z_1}{z_2}$.

➪ **Exemple 6 :** Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ tel que $|z| = 1$. Montrer que $Z = \frac{z+i}{iz+1} \in \mathbb{R}$.

Proposition 8

Soient $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a :

- $|z_1 z_2| = |z_1| \times |z_2|$
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z|^n = |z^n|$
- si $z_2 \neq 0$, $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

Preuve.

- $|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \overline{z_1 z_2} = z_1 z_2 \overline{z_1}\,\overline{z_2}$ par compatibilité de la conjugaison avec la multiplication.
  Ainsi, $|z_1 z_2|^2 = z_1\overline{z_1} z_2 \overline{z_2} = |z_1|^2 |z_2|^2$. Or, $|z_1 z_2|, |z_1|$ et $|z_2|$ sont des réels positif d'où $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.
- Par récurrence sur n.
- Si $z_2 \neq 0$ alors, on a : $1 = \left|z_2 \times \frac{1}{z_2}\right| = |z_2| \times \left|\frac{1}{z_2}\right|$. Comme $z_2 \neq 0$, on a $|z_2 \neq 0$ d'où $\left|\frac{1}{z_2}\right| = \frac{1}{|z_2|}$.
  Enfin, $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|z_1 \times \frac{1}{z_2}\right| = |z_1| \times \left|\frac{1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

□

➪ **Exemple 7 :** Posons $z_1 = \sqrt{3} + i$. Calculer le module de z_1^3.

2.2 Propriétés

Proposition 9

$$\forall z \in \mathbb{C}, (|z| = 0 \iff z = 0).$$

Preuve. Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} |z| = 0 &\iff |z|^2 = 0 \iff a^2 + b^2 = 0 \iff a^2 = 0 \text{ et } b^2 = 0 \text{ car } a^2, b^2 \geq 0 \\ &\iff a = 0 \text{ et } b = 0 \iff z = 0 \end{aligned}$$

□

Proposition 10

$$\forall z \in \mathbb{C}, |\text{Re}(z)| \leq |z| \text{ et } |\text{Im}(z)| \leq |z|.$$

Illustration :

Preuve.

□

2.3 Inégalité triangulaire

Proposition 11 : Inégalité triangulaire

Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a :

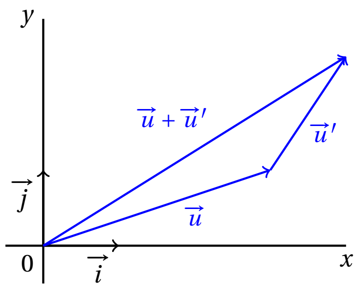
$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|,$$

de plus $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ si et seulement si $z_1 = 0$ ou s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $z_2 = \lambda z_1$.

Interprétation géométrique :

L'inégalité triangulaire peut donc s'interpréter de la manière suivante : si z et z' représentent les affixes de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ alors : $||\vec{u} + \vec{u}'|| \leq ||\vec{u}|| + ||\vec{u}'||$.

Le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire correspond au cas où les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont colinéaires de même sens.



Preuve.

$\square$

Corollaire 2

Soient $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, on a :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

Corollaire 3 : Deuxième inégalité triangulaire

Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|.$$

Preuve.

□

➪ **Exemple 8 :** Montrer que :

$$\forall a, b, c \in \mathbb{C}, |1 + a| + |a + b| + |b + c| + |c| \geq 1.$$

➪ **Exemple 9 :** Montrer que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \neq 1$:

$$\left|\frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}\right| \leq \frac{1 - |z|^{n+1}}{1 - |z|}.$$

III Nombres complexes de module 1 et trigonométrie

3.1 Cercle trigonométrique

Définition 6

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1 :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}.$$

Remarque : $\mathbb{U}$ est représenté par le cercle trigonométrique.

Proposition 12

- $\forall z, z' \in \mathbb{U},\ z.z' \in \mathbb{U}$
- $\forall z \in \mathbb{U},\ z \in \mathbb{U} \Leftrightarrow \overline{z} \in \mathbb{U}$
- $\forall z \in \mathbb{U},\ z \neq 0$
- $\forall z \in \mathbb{U},\ \frac{1}{z} \in \mathbb{U}$ et $\frac{1}{z} = \overline{z}$.

Remarque : Si $z, z' \in \mathbb{U}$, en général, $z + z' \notin \mathbb{U}$. Par exemple : $z = 1 \in \mathbb{U}$, $z' = i \in \mathbb{U}$ et $z + z' = 1 + i \notin \mathbb{U}$.

Proposition 13 : Paramétrisation de $\mathbb{U}$ par les fonctions circulaires

Un nombre complexe z est de module 1 si et seulement si il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{Re}\,(z) = \cos(\theta)$ et $\mathrm{Im}\,(z) = \sin(\theta)$. Ainsi :

$$\mathbb{U} = \{\cos(\theta) + i\sin(\theta),\ \theta \in \mathbb{R}\} = \{z \in \mathbb{C},\ \exists \theta \in \mathbb{R},\ z = \cos(\theta) + i\sin(\theta)\}.$$

Preuve.

□

3.2 Exponentielle d'un nombre imaginaire pur

Définition 7

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On note $e^{i\theta}$ le nombre complexe défini par $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

Proposition 14

L'application $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\theta \mapsto e^{i\theta}$ est 2π-périodique, c'est-à-dire :

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ e^{i(\theta+2\pi)} = e^{i\theta}.$$

Proposition 15

Soit $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$, on a :

$$e^{i\theta} e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)}$$

Preuve.

□

Corollaire 4

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$$

Preuve.

□

3.3 Egalités d'exponentielles de nombres imaginaires purs

Proposition 16

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$e^{i\theta} = 1 \iff \theta \equiv 0 \quad [2\pi]$$

Preuve.

□

Corollaire 5

Soient $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$, on a :

$$e^{i\theta} = e^{i\varphi} \iff \theta \equiv \varphi \quad [2\pi]$$

Preuve.

□

➪ **Exemple 10 :** Résoudre l'équation, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$e^{2ix} = i\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

3.4 Formules d'Euler et de Moivre

Proposition 17 : Formules d'Euler

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

Preuve.

□

Proposition 18 : Formule de Moivre

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ ou encore par définition de $e^{i\theta}$:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Preuve.

□

3.5 Factorisation par l'angle moitié

Méthode 2 : Factorisation par l'angle moitié

Lorsque l'on a une expression de la forme $e^{ia} \pm e^{ib}$, on met en facteur $e^{i\frac{a+b}{2}}$ puis on utilise la formule d'Euler.
Cela est en particulier utile pour :

- simplifier des puissances
- déterminer les formules de factorisation de $\cos(a) \pm \cos(b)$ ou $\sin(a) \pm \sin(b)$ en prenant la partie réelle ou la partie imaginaire.

L'expression la plus fréquente est : $1 \pm e^{it}$.

➪ **Exemple 11 :** Soient $t, a, b \in \mathbb{R}$. Factoriser :

- $z_1 = 1 + e^{it}$

- $z_2 = 1 - e^{it}$

- $z_3 = \cos(a) + \cos(b)$

- $z_4 = \sin(a) - \sin(b)$

➪ **Exemple 12 :** Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $t \in \mathbb{R}$. Calculer :

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kt) \text{ et } \sum_{k=0}^{n} \sin(kt).$$

3.6 Applications des formules de Moivre et d'Euler

Méthode 3 : Linéarisation

Pour linéariser une expression trigonométrique de la forme $\cos^k x \sin^l x$ (en combinaison linéaire de termes en $\cos(\alpha x)$ ou $\sin(\beta x)$), on procède comme suit :

1. On utilise les formules d'Euler pour exprimer $\cos x$ et $\sin x$ en fonction de e^{ix} et e^{-ix}.
2. On développe complètement les puissances.
3. On regroupe les termes deux à deux conjugués pour reconnaître des $\cos(\alpha x)$ ou $\sin(\beta x)$.

➪ **Exemple 13 :** Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser $\cos^3(x)\sin^2(x)$.

Remarque : La linéarisation permet de calculer des primitive de fonctions de la forme $x \mapsto \cos^k x \sin^l x$.

Méthode 4

Pour transformer $\cos(nx)$ ou $\sin(nx)$ en un polynôme en cos (ou en sin), on procède comme suit :

1. On écrit $\cos(nx) = \mathrm{Re}\,(e^{inx}) = \mathrm{Re}\left((e^{ix})^n\right) = \mathrm{Re}\,((\cos x + i\sin x)^n)$ grâce à la formule de Moivre.
2. On développe la puissance.
3. On ne garde que la partie réelle (ou imaginaire dans le cas d'un sinus).

➪ **Exemple 14 :** Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(4x)$ en fonction de $\cos x$.

➪ **Exemple 15 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soient $x, y \in \mathbb{R}$. Calculer la somme suivante :

$$S = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(x + ky).$$

IV Argument d'un nombre complexe non nul

4.1 Définitions

Proposition 19

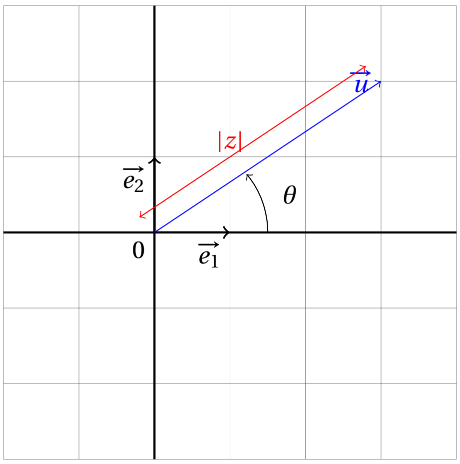
Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On a : $\dfrac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$ et il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$z = |z|e^{i\theta}.$$

Définition 8 : Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Soit $z \in \mathbb{C}^*$.
Soient $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $z = re^{i\theta}$.
L'écriture $z = re^{i\theta}$ est appelée **forme trigonométrique** ou **forme exponentielle**.
On dit que le réel θ est un argument de z.

Interprétation géométrique de l'argument :
Soit $z \in \mathbb{C}^*$ et θ un argument de z.
Si M a pour affixe z, alors, θ représente une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OM})$.
Si $\overrightarrow{u}$ a pour affixe z, alors, θ représente une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{u})$.



Proposition 20

Soit $z \in \mathbb{C}^*$, soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $z = re^{i\theta}$.
Soient $\theta' \in \mathbb{R}$ et $r' \in \mathbb{R}_+^*$

$$z = r'e^{i\theta'} \iff \begin{cases} r' = r \\ \theta' \equiv \theta \ [2\pi] \end{cases}$$

Preuve.

□

Proposition 21

Soit $z \in \mathbb{C}^*$ soit θ un argument de z, soit $\theta' \in \mathbb{R}$. On a : θ' est un argument de z ssi $\theta' \equiv \theta \mod 2\pi$, c'est-à-dire ssi $\exists k \in \mathbb{Z}, \theta' = \theta + 2k\pi$.

Remarque : Si θ est un argument de z, alors $\theta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ sont des arguments de z. Ainsi, tout nombre complexe non nul admet une infinité d'arguments. On va choisir d'en privilégier un avec la définition suivante.

Définition 9

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On appelle argument principal de z et on note $\operatorname{Arg}(z)$ l'unique argument de z appartenant à $]-\pi, \pi]$.

Méthode 5

Pour déterminer la forme trigonométrique ou l'argument principal de $z \in \mathbb{C}^*$:

1. on calcule $|z|$,
2. on factorise z par $|z|$,
3. on cherche à reconnaître des valeurs connues de cos et sin.

➪ **Exemple 16 :** Déterminer la forme trigonométrique de :

- $z_1 = 1 + i$

- $z_2 = -1 - i\sqrt{3}$

Méthode 6 : Calcul de puissances

Pour calculer la puissance d'un nombre complexe : z^n avec $z_i n \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, on utilise la forme trigonométrique de z et la formule de Moivre. On a : $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ donc :

$$z^n = r^n e^{in\theta}.$$

Remarque : Même si θ est l'argument principal de z, cette méthode ne donne pas directement l'argument principal de z^n.

➪ **Exemple 17 :** Déterminer l'argument principal de :

- $z_1 = (1+i)^{1000}$

- $z_2 = (-1 - i\sqrt{3})^{500}$:

4.2 Opérations sur les arguments

Proposition 22

Soient $z_1 \in \mathbb{C}^*$ et $z_2 \in \mathbb{C}^*$ d'arguments respectifs θ_1 et θ_2. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors

- $\overline{z_1}$ est non nul et $-\theta_1$ est un argument de $\overline{z_1}$.
- $z_1 z_2$ est non nul et $\theta_1 + \theta_2$ est un argument de $z_1 z_2$.
- $\dfrac{1}{z_2}$ est non nul et $-\theta_2$ est un argument de $\dfrac{1}{z_2}$.
- $\dfrac{z_1}{z_2}$ est non nul et $\theta_1 - \theta_2$ est un argument de $\dfrac{z_1}{z_2}$.
- z_1^n est non nul et $n\theta_1$ est un argument de z_1^n.
- $-z_1$ est non nul et $\theta_1 + \pi$ est un argument de $-z_1$.

Preuve. Comme θ_1 est un argument de z_1, on a $z_1 = |z_1|e^{i\theta_1}$. De même, $z_2 = |z_2|e^{i\theta_2}$.

- $\overline{z_1} = \overline{|z_1|e^{i\theta_1}} = |z_1|e^{-i\theta_1} = |\overline{z_1}|e^{-i\theta_1}$. Ainsi, $-\theta_1$ est un argument de $\overline{z_1}$.
- On a : $z_1 z_2 = |z_1|e^{i\theta_1} \times |z_2|e^{i\theta_2} = |z_1||z_2|e^{i(\theta_1+\theta_2)} = |z_1 z_2|e^{i(\theta_1+\theta_2)}$ ainsi $\theta_1 + \theta_2$ est un argument de $z_1 z_2$.
- On a $\dfrac{1}{z_2} = \dfrac{1}{|z_2|e^{i\theta_2}} = \dfrac{1}{|z_2|}e^{-i\theta_2} = \left|\dfrac{1}{z_2}\right| e^{-i\theta_2}$ ainsi $-\theta_2$ est un argument de $\dfrac{1}{z_2}$.
- Comme $\dfrac{z_1}{z_2} \dfrac{|z_1|e^{i\theta_1}}{|z_2|e^{i\theta_2}} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}e^{i(\theta_1-\theta_2} = \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| e^{i(\theta_2-\theta_1}$. Ainsi, $\theta_1 - \theta_2$ est un argument de $\dfrac{z_1}{z_2}$.
- $z_1^n = \left(|z_1|e^{i\theta_1}\right)^n = |z_1|^n \left(e^{i\theta_1}\right)^n = |z_1^n|e^{in\theta_1}$ ainsi $n\theta_1$ est un argument de z_1^n.
- $-z_1 = -|z_1|e^{i\theta_1} = |z_1|e^{i(\theta_1+\pi)} = |-z_1|e^{i(\theta_1+\pi)}$ ainsi $\theta_1 + \pi$ est un argument de $-z_1$.

□

4.3 Amplitude et phase

Méthode 7 : Amplitude et phase

On veut transformer une expression de la forme $a\cos t + b\sin t$, $(a,b) \neq (0,0)$ en $A\cos(t-\varphi)$ où A désigne l'amplitude et φ la phase.
• On pose $z = a + ib$, comme $z \in \mathbb{C}^*$, il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que : $z = |z|e^{i\varphi}$. Donc :

$$a = \sqrt{a^2+b^2}\cos(\varphi) \text{ et } b = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\varphi).$$

• On a alors :

$$a\cos t + b\sin t = \sqrt{a^2+b^2}\left(\cos\varphi\cos t + \sin\varphi\sin t\right) = \sqrt{a^2+b^2}\cos(t-\varphi).$$

Donc $A = \sqrt{a^2+b^2}$ convient.

V Équations algébriques

5.1 Rappels

Proposition 23 : Résolution de l'équation du second degré à coefficients réels

Soit $az^2 + bz + c = 0$ une équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ à coefficients $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$.
On appelle discriminant de l'équation, le nombre réel $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta = 0$, l'équation admet une unique solution $z_0 = -\dfrac{b}{2a}$, appelée racine double et
$$\forall z \in \mathbb{C},\ az^2 + bz + c = a(z-z_0)^2.$$
- Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes, $z_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et
$$\forall z \in \mathbb{C},\ az^2 + bz + c = a(z-z_1)(z-z_2).$$
- Si $\Delta < 0$, l'équation admet deux solutions non réelles distinctes, $z_1 = \dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et
$$\forall z \in \mathbb{C},\ az^2 + bz + c = a(z-z_1)(z-z_2).$$

5.2 Racines carrées d'un nombre complexe

Définition 10

On appelle racine carrée d'un nombre complexe z tout nombre complexe u vérifiant $u^2 = z$.

Remarque :

- Si $z \neq 0$, z admet deux racines carrées opposées.
- Dans $\mathbb{R}^+$, les racines carrées sont réelles, on choisit d'appeler **la** racine carrée et de noter avec le symbole $\sqrt{}$ celle qui est positive. Mais, en dehors de $\mathbb{R}^+$, on ne peut pas parler de **la** racine carrée mais d'**une** racine carrée et on ne peut pas utiliser le symbole $\sqrt{}$.

Méthode 8 : Détermination des racines carrées d'un nombre complexe

Soit $z \in \mathbb{C}^*$.
• Si on connaît la forme trigonométrique de z
Si $z = re^{i\theta}$ où $r = |z|$, ses racines carrées sont $\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $-\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$.
• Sinon, on utilise la forme algébrique de z
On note $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ la forme cartésienne de z.
Soit $x, y \in \mathbb{R}$.

$$(x+iy)^2 = z \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = a & \text{(égalité des parties réelles)} \\ 2xy = b & \text{(égalité des parties imaginaires)} \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} & \text{(égalité des modules)} \end{cases}$$

On peut alors calculer x^2 et y^2 puis en déduire x et y, les signes relatifs de x et y étant donnés par l'équation $2xy = b$.

➪ **Exemple 18 :** Calculer les racines carrées de $\sqrt{3} + i$ et de $-5 + 12i$.

5.3 Résolution des équations du second degré

Proposition 24 : Résolution de l'équation du second degré

Soit $az^2+bz+c=0$ une équation d'inconnue $z\in\mathbb{C}$ à coefficients $a,b,c\in\mathbb{C}$ avec $a\neq 0$.
On appelle discriminant de l'équation, le nombre $\Delta=b^2-4ac$.

- Si $\Delta=0$, l'équation admet une unique solution $z_0=-\dfrac{b}{2a}$, appelée racine double et
$$\forall z\in\mathbb{C},\ az^2+bz+c=a(z-z_0)^2.$$
- Si $\Delta\neq 0$, l'équation admet deux solutions distinctes, $z_1=\dfrac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2=\dfrac{-b+\delta}{2a}$, où δ est une racine carrée de Δ et
$$\forall z\in\mathbb{C},\ az^2+bz+c=a(z-z_1)(z-z_2).$$

Remarque : les racines d'une équation du second degré à coefficients complexes ne sont, en général, pas conjuguées.

Preuve.

□

➪ **Exemple 19 :** Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^2 - (5 - 14i)z - 2(5i + 12) = 0.$$

➪ **Exemple 20 :** Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^2 + 2z + 1 - \sqrt{3} - i = 0.$$

Proposition 25 : Relations coefficients racines

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Alors :

$$z_1,\ z_2 \text{ sont les solutions (éventuellement confondues) de l'équation } az^2 + bz + c = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a} \\ z_1 z_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

Preuve.

□

5.4 Factorisation

Proposition 26

Soit P une fonction polynomiale à coefficients complexes :

$$\begin{array}{rccc} P: & \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, \end{array}$$

avec $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$.
Soit $a \in \mathbb{C}$ une racine de P, c'est-à-dire tel que $P(a) = 0$.
Alors, il existe une fonction polynomiale à coefficients complexes Q telle que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = (z - a)Q(z).$$

Preuve.

$\square$

➪ **Exemple 21 :** Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^3 + (1-i)z^2 + (-1-4i)z - 3 + i = 0.$$

On commencera par montrer que i est racine de cette équation.

5.5 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Proposition 27

On pose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soient $a \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $b \in \mathbb{R}^*$ ou $\mathbb{C}^*$. On considère la relation de récurrence linéaire d'ordre 2 :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n. \quad (*)$$

L'équation $r^2 - ar - b = 0$ est appelée équation caractéristique.

- Si l'équation caractéristique admet deux solutions distinctes $r_1,\ r_2 \in \mathbb{K}$, les suites vérifiant $(*)$ sont de la forme :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{K}.$$
- Si l'équation caractéristique admet une solution double $r \in \mathbb{K}$, les suites vérifiant $(*)$ sont de la forme :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\lambda + \mu n) r^n, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{K}.$$

Remarque :

- La preuve est analogue à celle vue pour les suites réelles.
- Les constantes sont dans l'ensemble qui correspond aux racines et pas aux coefficients.

➪ **Exemple 22 :** On pose : $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = -u_n$.
Déterminer le terme général de la suite (u_n).

VI Racines n-ièmes

6.1 Racines n-ièmes de l'unité

Définition 11

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle racine n-ième de l'unité tout nombre complexe z vérifiant $z^n = 1$.
On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.

Proposition 28

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}.$$

Preuve.

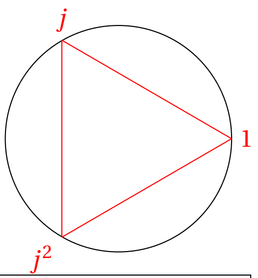
□

Proposition 29

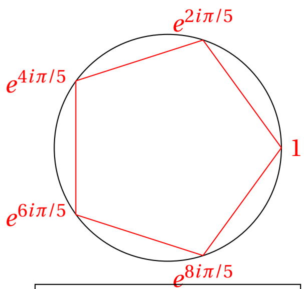
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\mathbb{U}_n$ est l'ensemble à n éléments :

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{2ik\pi/n}, k \in [\![0, n-1]\!] \right\}.$$

Remarque : Les points du plan complexe dont les affixes sont les racines n-ièmes de l'unité forment un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle trigonométrique.



Représentation de $\mathbb{U}_3$



Représentation de $\mathbb{U}_5$

Les points en question sont tous situés sur le cercle trigonométrique et l'angle au centre formé par deux points consécutifs sur le cercle vaut $\dfrac{2\pi}{n}$.

Preuve.

$\square$

Proposition 30

Soit $n \geq 2$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{2ik\pi/n} = 0.$$

Preuve.

□

➪ **Exemple 23 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le produit des racines n-ièmes de l'unité.

6.2 Racines n-ièmes d'un nombre complexe

Définition 12

Soient $a \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle racine n-ième de a tout nombre complexe z vérifiant $z^n = a$.

Méthode 9 : Détermination de racines

Pour résoudre une équation du type $z^n = a$ avec $a \in \mathbb{C}^*$, on doit déterminer la forme trigonométrique de a : $a = |a|e^{i\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}$ puis on écrit :

$$\begin{aligned} z^n = a &\iff \frac{z^n}{a} = 1 \\ &\iff \left(\frac{z}{|a|^{1/n}e^{i\theta/n}}\right)^n = 1 \\ &\iff \frac{z}{|a|^{1/n}e^{i\theta/n}} \in \mathbb{U}_n \\ &\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!],\ \frac{z}{|a|^{1/n}e^{i\theta/n}} = e^{2ik\pi/n} \\ &\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!],\ z = |a|^{1/n}e^{i(\theta/n+2ik\pi/n)} \end{aligned}$$

Remarque :

- Comme pour la racine carrée, on n'écrit pas le symbole $\sqrt[n]{\text{Ł}}$.
- Un nombre complexe non nul admet n racines n-ièmes distinctes.

➪ **Exemple 24 :** Déterminer les racines 5-ièmes de $-2+2i$.

➪ **Exemple 25 :** Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^6 - 2iz^3 - 2 = 0.$$

➪ **Exemple 26 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^n + 1 = 0.$$

VII Exponentielle complexe

Définition 13

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on appelle exponentielle de z et on note e^z ou $\exp(z)$ le nombre complexe défini par :

$$e^z = e^{\operatorname{Re} z} e^{i \operatorname{Im} z}.$$

Proposition 31

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{Z}$. On a :

- $|\exp(z)| = e^{\operatorname{Re} z}$ et $\operatorname{Im} z$ est un argument de $\exp(z)$.
- $\exp(z+z') = \exp(z)\exp(z')$.
- $\dfrac{1}{e^z} = e^{-z}$
- $\dfrac{e^z}{e^{z'}} = e^{z-z'}$
- $(e^z)^n = e^{nz}$.
- $\exp(z) = \exp(z') \iff z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z} \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ z - z' = 2i\pi k$

Preuve.

□

Méthode 10 : Equation exponentielle

Pour résoudre une équation du type $e^z = a$ avec $a \in \mathbb{C}^*$, on doit déterminer la forme trigonométrique de a : $a = |a|e^{i\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}$ puis on écrit :

$$\begin{aligned} e^z = a &\iff e^z = |a|e^{i\theta} \\ &\iff e^z = e^{\ln|a| + i\theta} \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ z = \ln|a| + i\theta + 2ik\pi \end{aligned}$$

➪ **Exemple 27 :** Résoudre les équations d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

1. $e^z = -1$

2. $e^z = 1+i$

3. $e^z = 2$

VIII Dérivation d'une fonction complexe d'une variable réelle

8.1 Définition

Dans toute la suite, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes.

Définition 14

On définit la partie réelle de f notée $\mathrm{Re}(f)$ et la partie imaginaire de f notée $\mathrm{Im}(f)$ par :

- $\mathrm{Re}(f) : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{Re}(f(x)) \end{array}$
- $\mathrm{Im}(f) : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{Im}(f(x)) \end{array}$

Remarque : Les propriétés de la fonction $f : I \to \mathbb{C}$ se ramènent alors aux propriétés des fonctions $\mathrm{Re}(f) : I \to \mathbb{R}$ et $\mathrm{Im}(f) : I \to \mathbb{R}$.

Définition 15

f est continue sur I si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont.

Définition 16

On dit que f est dérivable sur I si $\mathrm{Re}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont dérivables sur I. On appelle alors dérivée de f et on note f' la fonction définie par : $f' : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & (\mathrm{Re}(f))'(x) + i(\mathrm{Im}(f))'(x) \end{array}$.

Remarque : On a ainsi : $\mathrm{Re}(f') = \left(Re(f)\right)'$ et $\mathrm{Im}(f') = \left(\mathrm{Im}(f)\right)'$

Proposition 32 : Opérations sur les fonctions dérivables

Soient $f, g : I \to \mathbb{C}$ deux fonctions dérivables sur I et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$. Alors $(\lambda f + \mu g)$, fg sont dérivables sur I. De plus, si g ne s'annule pas sur I, $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I et on a :

$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g' \qquad (fg)' = f'g + fg' \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Remarque : Ces formules sont semblables à celle concernant les fonctions à valeurs réelles.

8.2 Exponentielle complexe

Proposition 33

Soit $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction dérivable sur I. Alors, la fonction $\exp\circ\varphi : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & e^{\varphi(x)} \end{array}$ est dérivable sur I et on a :

$$\forall x \in I,\ (\exp\circ\varphi)'(x) = \varphi'(x)e^{\varphi(x)}$$

Preuve.

□

Corollaire 6

Soit $a \in \mathbb{C}$, la fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & e^{ax} \end{array}$ est dérivable et sa dérivée est : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & ae^{ax} \end{array}$.

➪ **Exemple 28 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer les dérivées n-ièmes de cos et sin.

IX Interprétation géométrique des nombres complexes

9.1 Symétrie

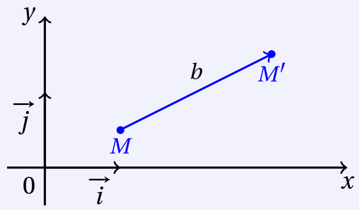
Proposition 34

L'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \overline{z} \end{array}$ représente la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

9.2 Translations

Proposition 35

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan d'affixe $b \in \mathbb{C}$.
L'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z+b \end{array}$ représente la translation de vecteur $\vec{u}$.



Preuve. Soit $M, M' \in \mathcal{P}$ d'affixes respectives z, z'. Notons $T_{\vec{u}} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ la translation de vecteur $\vec{u}$ et $\begin{array}{ccc} t_b : \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ : z & \mapsto & z+b \end{array}$.
On a :

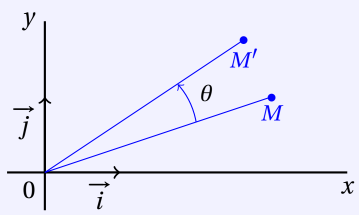
$$M' = T_{\vec{u}}(M) \iff \overrightarrow{MM'} = \vec{u} \iff z' - z = b \iff z' = z + b \iff z' = t_b(z)$$

□

9.3 Rotations et homothéties

Proposition 36

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.
L'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & e^{i\theta} z \end{array}$ représente la rotation de centre O et d'angle θ.



Preuve. Soit $M, M' \in \mathcal{P}$ d'affixes respectives z, z'. Notons $R_\theta : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ la rotation d'angle θ et $\begin{array}{ccc} r_\theta : \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ : z & \mapsto & ze^{i\theta} \end{array}$.

- Cas 1 : si $z \neq 0$ i.e $M \neq O$:

$$M' = T_{\vec{u}}(M) \iff \begin{cases} OM = OM' \\ (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) \equiv \theta [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} |z| = |z'| \\ \operatorname{Arg}\left(\frac{z'}{z}\right) \equiv \theta \ [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} \left|\frac{z'}{z}\right| = 1 \\ \operatorname{Arg}\left(\frac{z'}{z}\right) \equiv \theta \ [2\pi] \end{cases}$$

$$\iff \frac{z'}{z} = e^{i\theta} \iff z' = ze^{i\theta} \iff z' = r_\theta(z)$$

- Cas 2 : si $z = 0$ i.e $M = O$:

$$M' = R_\theta(M) \iff M' = M = O \iff z' = z = 0 \iff z' = r_\theta(z)$$

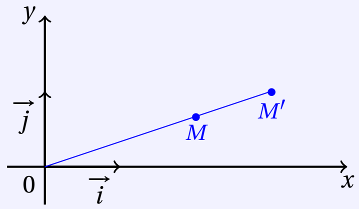
□

Définition 17

L'homothétie de centre $\Omega \in \mathcal{P}$ et de rapport $\lambda \in \mathbb{R}^*$ est l'application du plan dans lui même qui, à tout point M, associe le point M' tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = \lambda \overrightarrow{\Omega M}$.

Proposition 37

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$.
L'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \lambda z \end{array}$ représente l'homothétie de centre O et de rapport λ .



Preuve. Soit $M, M' \in \mathcal{P}$ d'affixes respectives z, z'.
Notons $H_\lambda : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ l'homothétie de centre O et de rapport λ et $\begin{array}{ccc} h_\lambda : \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ : z & \mapsto & \lambda z \end{array}$.

$$M' = H_\lambda(M) \iff \overrightarrow{OM'} = \lambda \overrightarrow{OM} \iff z' = \lambda z \iff z' = h_\lambda z$$

□

Corollaire 7

Soit $a \in \mathbb{C}^*$.
L'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & az \end{array}$ représente la composée de l'homothétie de centre O et rapport $|a|$ avec la rotation de centre O et d'angle $\operatorname{Arg}(a)$.

Remarque : Ces applications sont appelées des similitudes directes.

9.4 Alignement et orthogonalité

Proposition 38

Soit $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ deux vecteurs du plan non nuls d'affixes respectives z_1 et z_2. Une mesure de l'angle $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ est donnée par un argument de $\dfrac{z_2}{z_1}$.
Par suite :

- $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont colinéaires si et seulement si $\dfrac{z_2}{z_1} \in \mathbb{R}$.
- $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont orthogonaux si et seulement si $\dfrac{z_2}{z_1} \in i\mathbb{R}$.

Preuve. On munit le plan usuel $\mathcal{P}$ d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.
Soit θ_1 (resp. θ_2) un argument de z_1 (resp. z_2).
On a $\theta_1 \equiv (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{u_1})[2\pi]$ et $\theta_2 \equiv (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{u_2})[2\pi]$. Or, $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}) = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{u_2}) - (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{u_1})$ donc $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}) \equiv \theta_2 - \theta_1[2\pi]$.
Ainsi, $\theta_2 - \theta_1$ qui est un argument de $\dfrac{z_2}{z_1}$ est une aussi mesure l'angle $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$.
On a alors :

- $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont colinéaires si et seulement si $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}) \equiv 0[\pi]$ si et seulement si $\theta_2 - \theta_1 \equiv 0[\pi]$ si et seulement si $\dfrac{z_2}{z_1} \in \mathbb{R}$
- De même, $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont orthogonaux si et seulement si $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}) \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$ si et seulement si $\theta_2 - \theta_1 \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$ si et seulement si $\dfrac{z_2}{z_1} \in i\mathbb{R}$

□

Corollaire 8

Soient A, B et C trois points du plan, deux à deux distincts et d'affixes respectives z_A, z_B et z_C. Une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est donnée par un argument de $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$. Par suite :

- A, B et C sont alignés si et seulement si $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$.
- ABC est rectangle en A si et seulement si $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$.

➪ **Exemple 29 :** Déterminer les nombres $z \in \mathbb{C}$ tels que les points d'affixes 1, z et z^2 forment un triangle rectangle.