Chapitre 4 : Trigonométrie

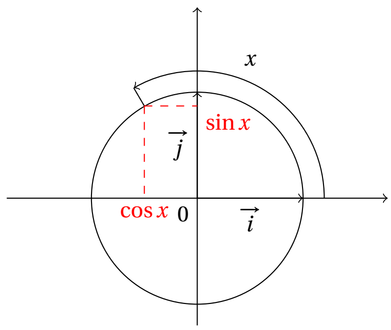
I Cercle trigonométrique

1.1 Définition

Définition 1

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $(0, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé direct. On note M le point du cercle trigonométrique (cercle de centre O et de rayon 1) tel que l'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ a pour mesure x radians. On note alors $(\cos x, \sin x)$ les coordonnées de M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On appelle cosinus la fonction $\cos : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(x) \end{array}$ et sinus la fonction $\sin : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(x) \end{array}$.



1.2 Formules de trigonométrie

Formule 1 : Quelques valeurs

$$\begin{array}{ccccc} \cos(0) = 1 & \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} & \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ \sin(0) = 0 & \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} & \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} & \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} & \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{array}$$

Formule 2 : Cercle trigonométrique

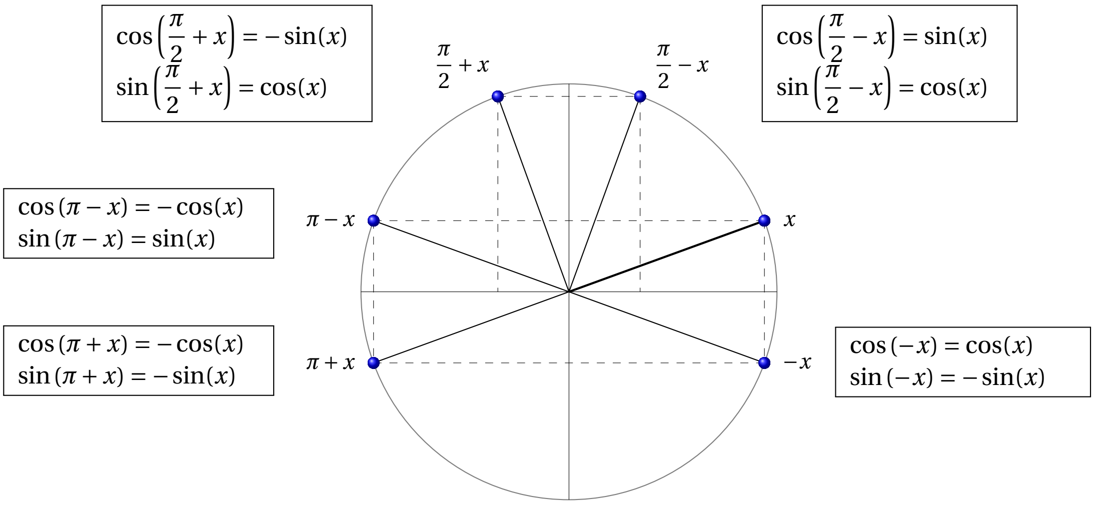
$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Formule 3 : Formules élémentaires

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{ll} \cos(-x) = \cos(x) & \sin(-x) = -\sin(x) \\ \cos(\pi - x) = -\cos(x) & \sin(\pi - x) = \sin(x) \\ \cos(\pi + x) = -\cos(x) & \sin(\pi + x) = -\sin(x) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x) & \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x) & \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x) \end{array}$$

Remarque : Ces formules doivent être visualisées sur le cercle trigonométrique.



Formule 4 : Formules d'addition

Soient a, $b \in \mathbb{R}$,

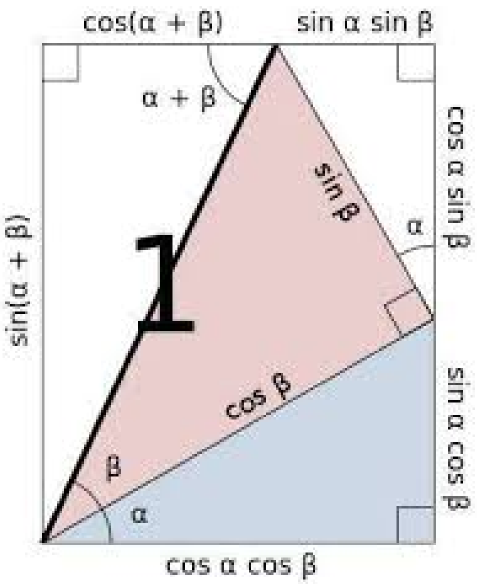
$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

Justification géométrique des formules d'addition :



Remarque : Il faut savoir, à partir de ces formules, trouver rapidement les valeurs d'un produit de deux cosinus et/ou sinus.

➪ **Exemple 1 :** Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(a)\cos(b)$ et $\cos(a)\sin(b)$ comme des sommes.

Formule 5 : Formules de l'angle double

Soit $a \in \mathbb{R}$,

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 1 - 2\sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1$$

$$\sin(2a) = 2\cos(a)\sin(a)$$

➪ **Exemple 2 :** Soit $x \in \mathbb{R}$, simplifier : $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$.

1.3 Congruences

Définition 2

Soit $a \in \mathbb{R}^*$, soient $x, y \in \mathbb{R}$.
On dit que x et y sont congrus modulo a et on note $x \equiv y \quad [a]$ ou $x \equiv y \mod a$ si et seulement si :

$$\exists k \in \mathbb{Z}, x = y + ka.$$

Proposition 1

Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$, soient $x, y, z, t \in \mathbb{R}$. On a :

$$(x \equiv y \quad [a] \text{ et } z \equiv t \quad [a]) \Longrightarrow x + z \equiv y + t \quad [a],$$

$$x \equiv y \quad [a] \Longrightarrow bx \equiv by \quad [ba].$$

Preuve. □

II Équations et inéquations trigonométriques

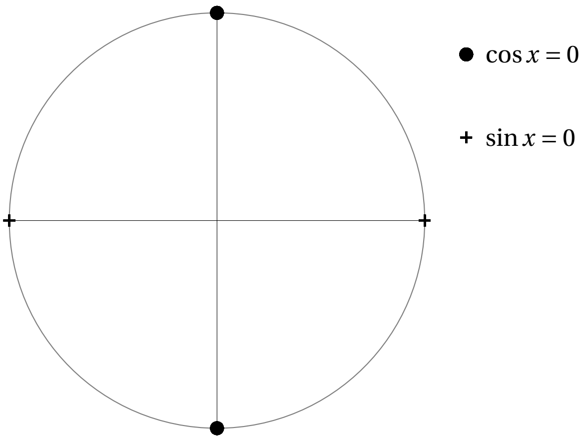
2.1 Équations trigonométriques

Proposition 2

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\cos x = 0 \iff x \equiv \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$$

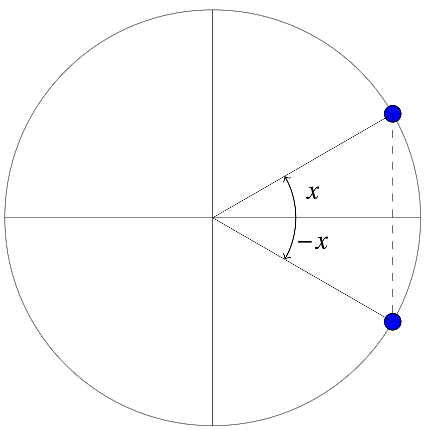
$$\sin x = 0 \iff x \equiv 0 \quad [\pi]$$



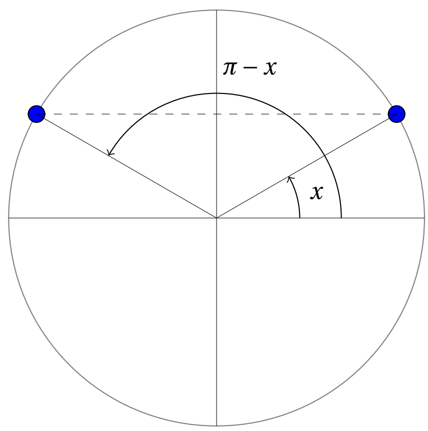
Proposition 3

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Alors,

- $\cos x = \cos y \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x \equiv y \quad [2\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv -y \quad [2\pi] \end{cases}.$
- $\sin x = \sin y \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x \equiv y \quad [2\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv \pi - y \quad [2\pi] \end{cases}.$



$\cos x = \cos y$



$\sin x = \sin y$

➪ **Exemple 3 :** Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

➪ **Exemple 4 :** Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\sqrt{3}\cos x - \sin x = 1.$$

➪ **Exemple 5 :** Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$4\sin x \cos x = 1.$$

2.2 Inéquations trigonométriques

Pour résoudre des inéquations trigonométriques, on utilise la lecture sur le cercle trigonométrique et la périodicité.

➪ **Exemple 6 :** Résoudre l'inéquation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

➪ **Exemple 7 :** Résoudre l'inéquation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\sqrt{3}\cos x - \sin x \geq 1.$$

III Fonctions cosinus et sinus

3.1 Propriétés globales

Proposition 4

Les fonctions cosinus et sinus sont 2π-périodiques :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x+2\pi) = \cos x \text{ et } \sin(x+2\pi) = \sin x.$$

Proposition 5

La fonction cosinus est paire et la fonction sinus est impaire :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(-x) = \cos x \text{ et } \sin(-x) = -\sin x.$$

Remarque : Ces deux résultats se voient sur le cercle trigonométrique.

3.2 Dérivées et variations

Proposition 6

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Preuve.

□

Proposition 7

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

Preuve.

□

Proposition 8

Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et :

$$\sin' = \cos, \qquad \cos' = -\sin.$$

Preuve.

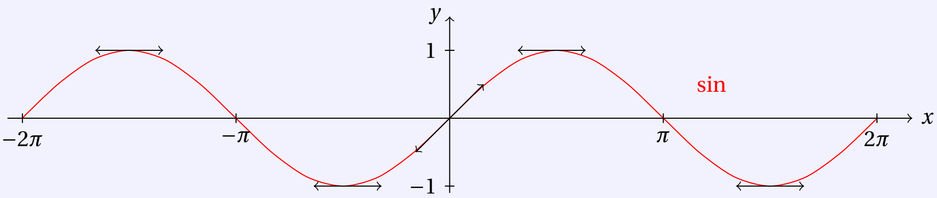
$\square$

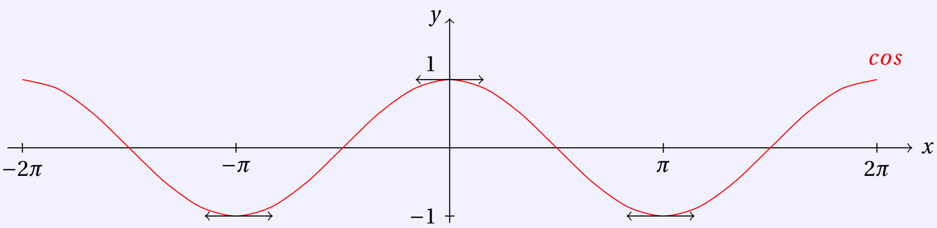
Proposition 9

Les variations sur $[0,\pi]$ des fonctions cosinus et sinus sont donnés par :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$(\sin)'(x)$		$+$	0	$-$	
$\sin$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$(\cos)'(x)$	0		$-$		0
$\cos$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1





Corollaire 1

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $u : I \to \mathbb{R}$ dérivable. Alors $\cos\circ u$ et $\sin\circ u$ sont dérivables sur I et :

$$\forall x \in I,\ (\cos\circ u)'(x) = -u'(x).\sin(u(x)) \text{ et } (\sin\circ u)'(x) = u'(x).\cos(u(x)).$$

Proposition 10

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |\sin x| \leq |x|.$$

Preuve.

$\square$

IV Tangente

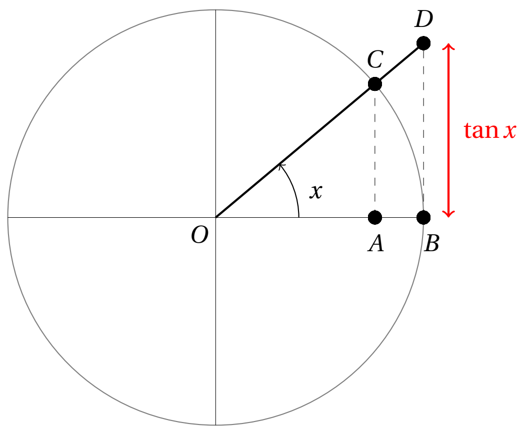
4.1 Définition

Définition 3

On appelle fonction tangente et on note tan, la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$ par : $x \longmapsto \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

Remarque : Le domaine de définition exclu les points d'annulation du cosinus.

Illustration :



D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{BD}{OB}=\frac{AC}{OA}.$$

Ainsi :

$$\frac{BD}{1}=\frac{\sin x}{\cos x}.$$

D'où :

$$BD=\tan x.$$

4.2 Formules de trigonométrie

Formule 6 : Quelques valeurs

$$\tan(0)=0 \quad \tan\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1 \quad \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$$

Formule 7 : Formules élémentaires

Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $t \not\equiv \frac{\pi}{2} \mod \pi$,

$$\tan(-t) = -\tan(t) \qquad \tan(\pi + t) = \tan(t) \qquad \tan(\pi - t) = -\tan(t)$$

Formule 8 : Formules d'addition

Si $(a \not\equiv \frac{\pi}{2} \mod \pi)$, $(b \not\equiv \frac{\pi}{2} \mod \pi)$ et $(a + b \not\equiv \frac{\pi}{2} \mod \pi)$, alors

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

Si $(a \not\equiv \frac{\pi}{2} \mod \pi)$, $(b \not\equiv \frac{\pi}{2} \mod \pi)$ et $(a - b \not\equiv \frac{\pi}{2} \mod \pi)$, alors

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

Formule 9 : Formules de l'angle double

Si $(a \not\equiv \frac{\pi}{2} \mod \pi)$ et $(a \not\equiv \frac{\pi}{4} \mod \frac{\pi}{2})$

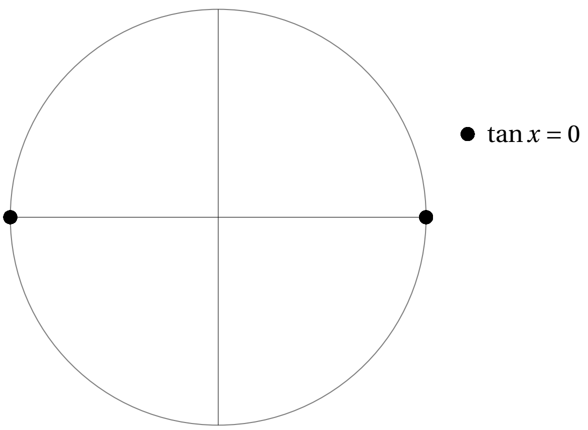
$$\tan(2a) = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$$

4.3 Résolution d'équations trigonométriques

Proposition 11

Soit $x \in \mathbb{R} \backslash \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$:

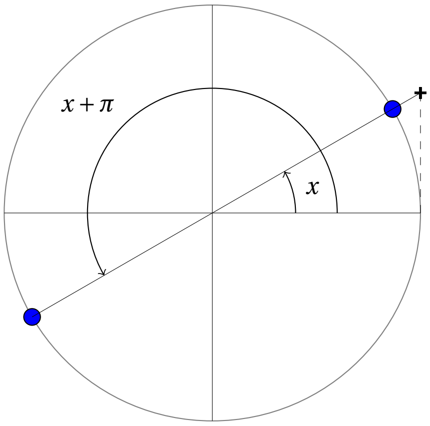
$$\tan x = 0 \iff x \equiv 0 \quad [\pi].$$



Proposition 12

Soient $x, y \in \mathbb{R} \backslash \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, on a :

$$\tan x = \tan y \iff x \equiv y \quad [\pi].$$



$$\tan x = \tan y$$

Preuve.

□

4.4 Fonction tangente

Proposition 13

La fonction tan est π-périodique et impaire :

$$\forall x \in \mathbb{R} \backslash \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}, \tan(x+\pi) = \tan(x) \text{ et } \tan(-x) = -\tan x.$$

Proposition 14

La fonction tan est dérivable sur $\mathbb{R} \backslash \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$:

$$\forall x \in \mathbb{R} \backslash \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}, \tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

Preuve.

□

Corollaire 2

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $u : I \to \mathbb{R}$ dérivable telle que : $\forall x \in I,\ u(x) \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Alors $\tan\circ u$ est dérivable sur I et :

$$\forall x \in I,\ (\tan\circ u)'(x) = \frac{u'(x)}{\cos^2(u(x))} = u'(x)\left(1 + \tan^2(u(x))\right).$$

Proposition 15

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} \tan(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to(-\frac{\pi}{2})^+} \tan(x) = -\infty.$$

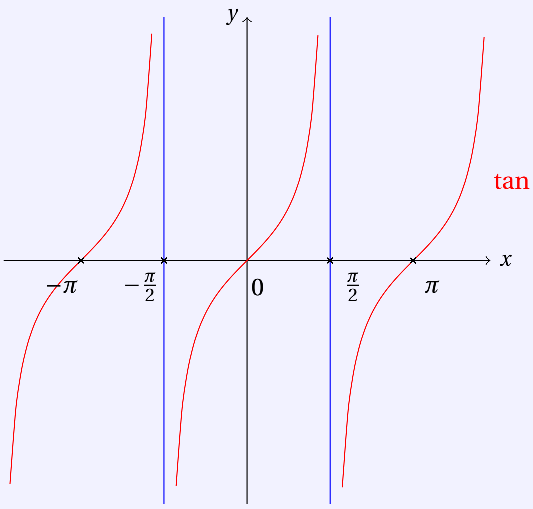
Preuve.

□

Proposition 16

Les variations sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ de la fonction tangente sont données par :

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$(\tan)'(x)$	||		$+$		||
$\tan$	|| $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$ ||



V Fonctions cosinus et sinus hyperboliques

Définition 4

On définit les fonctions cosinus hyperbolique, noté ch, et sinus hyperbolique, noté sh, par :

$$\text{ch} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \end{array} \quad \text{et} \quad \text{sh} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array}.$$

Proposition 17

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1.$$

Remarque :

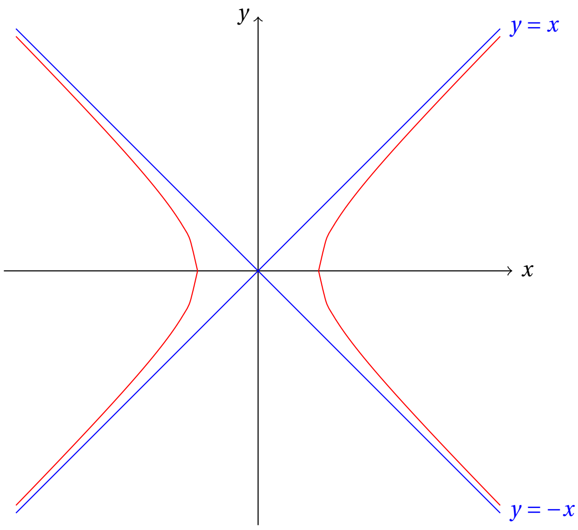
- Ces deux fonctions sont appelées cosinus et sinus par analogie avec les formules d'Euler qui sont :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \text{ et } \sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}.$$

- On parle de trigonométrie hyperbolique car la proposition précédente montre que les points de coordonnées $(\operatorname{ch}(t), \operatorname{sh}(t))$ décrivent une hyperbole.
  En effet, notons $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $x^2 - y^2 = 1$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(\operatorname{ch}(t), \operatorname{sh}(t)) \in \mathcal{C}$.
  De plus, soient $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$(x, y) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow y^2 = x^2 - 1 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{x^2-1} \text{ si } |x| \geq 1.$$

  On obtient ainsi le tracé suivant :



  Il s'agit d'une hyperbole.

Proposition 18

ch est paire et sh est impaire.

Preuve.

□

Proposition 19

ch et sh sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$ et $\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}$.

Preuve.

□

Proposition 20

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{ch}(x) = +\infty \qquad \operatorname{ch}(0) = 1 \qquad \lim_{x\to+\infty} \operatorname{ch}(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{sh}(x) = -\infty \qquad \operatorname{sh}(0) = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \operatorname{sh}(x) = +\infty$$

Preuve.

□

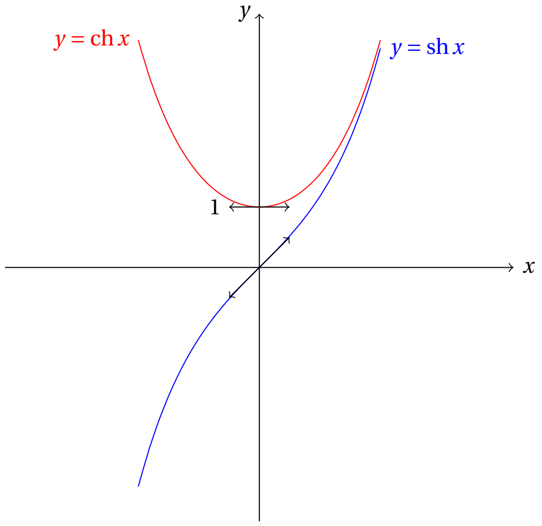
Proposition 21

- ch est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$.
- sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(x) \geq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \operatorname{sh}(x) > 0$, , $\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \operatorname{sh}(x) < 0$.

Preuve.

□

Les courbes représentatives des fonction ch et sh sont :



Cosinus hyperbolique :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{ch}'(x)$		$-$	0	$+$	
ch	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Sinus hyperbolique :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{sh}'(x)$			$+$		
sh	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

➪ **Exemple 8 :** Résoudre l'équation suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$,

$$7\mathrm{ch}\, x + 2\mathrm{sh}\, x = 9.$$

➪ **Exemple 9 :** Etudier la fonction suivante :

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{th} : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x}. \end{array}$$

VI Fonctions circulaires réciproques

6.1 Définitions

La fonction cos est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[0,\pi]$.
Elle est donc bijective de $[0,\pi]$ vers $[\cos(\pi),\cos(0)]=[-1,1]$.

Définition 5

La fonction cos réalise une bijection de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$.
On appelle arc cosinus et on note Arccos : $[-1,1]\to[0,\pi]$ sa bijection réciproque.
On a :

$$\forall x\in[0,\pi],\ \forall y\in[-1,1],\ \left(\cos x=y\Longleftrightarrow x=\operatorname{Arccos}(y)\right).$$

La fonction sin est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$.
Elle est donc bijective de $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ vers $\left[\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right),\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right]=[-1,1]$.

Définition 6

La fonction sin réalise une bijection de $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1,1]$.
On appelle arc sinus et on note Arcsin : $[-1,1]\to\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ sa bijection réciproque. On a :

$$\forall x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],\ \forall y\in[-1,1],\ \left(\sin x=y\Longleftrightarrow x=\operatorname{Arcsin}(y)\right).$$

La fonction tan est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$.
Elle est donc bijective de $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ vers $\left]\lim\limits_{-\frac{\pi}{2}^+}\tan,\lim\limits_{\frac{\pi}{2}^-}\tan\right[=\mathbb{R}$.

Définition 7

La fonction tan réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.
On appelle arc tangente et on note Arctan : $\mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sa bijection réciproque. On a :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \forall y \in \mathbb{R}, \left(\tan x = y \Longleftrightarrow x = \mathrm{Arctan}\,(y)\right).$$

Formule 10 : Quelques valeurs

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Arccos}\,(1) = 0 & \mathrm{Arcsin}\,(0) = 0 & \mathrm{Arctan}\,(0) = 0 \\
\mathrm{Arccos}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6} & \mathrm{Arcsin}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6} & \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6} \\
\mathrm{Arccos}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4} & \mathrm{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4} & \mathrm{Arctan}\,(1) = \frac{\pi}{4} \\
\mathrm{Arccos}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3} & \mathrm{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3} & \mathrm{Arctan}\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3} \\
\mathrm{Arccos}\,(0) = \frac{\pi}{2} & \mathrm{Arcsin}\,(1) = \frac{\pi}{2} & \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{Arctan}\,(x) = \frac{\pi}{2}
\end{array}$$

6.2 Etude des fonctions

Proposition 22

Arccos $\in \mathcal{C}^0([-1,1])$ et Arcsin $\in \mathcal{C}^0([-1,1])$
Arccos $\in \mathcal{C}^\infty(]-1,1[)$,Arcsin $\in \mathcal{C}^\infty(]-1,1[)$ et Arctan $\in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$

$$\forall x \in]-1,1[\, \mathrm{Arccos}'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \mathrm{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Preuve.

□

Corollaire 3

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
• Soit $u : I \to]-1,1[$ dérivable alors :

$$\forall x \in I,\ (\operatorname{Arccos} \circ u)'(x) = -\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}},\ (\operatorname{Arcsin} \circ u)'(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}$$

• Soit $u : I \to \mathbb{R}$ dérivable alors :

$$\forall x \in I,\ (\operatorname{Arctan} \circ u)'(x) = \frac{u'(x)}{1+u(x)^2}$$

Proposition 23

- Arccos est strictement décroissante sur $[-1,1]$.
- Arcsin est strictement croissante sur $[-1,1]$.
- Arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

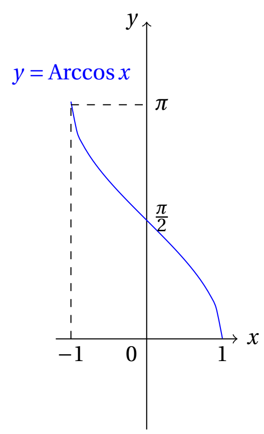
Proposition 24

Arcsin et Arctan sont impaires.

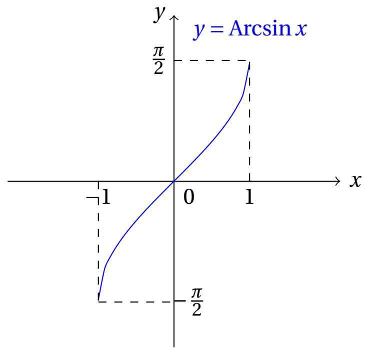
Preuve.

□

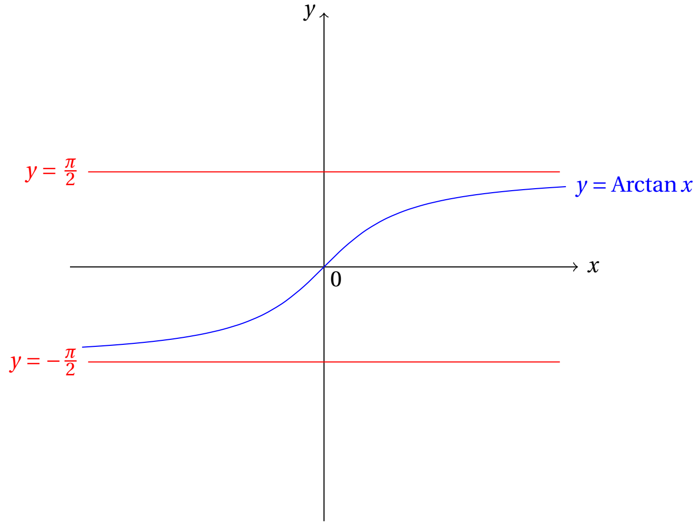
x	-1	0	1
Arccos	π ↘	$\frac{\pi}{2}$ ↘	0



x	-1	0	1
Arcsin	$-\frac{\pi}{2}$ ↗	0 ↗	$\frac{\pi}{2}$



x	$-\infty$		0		$+\infty$
Arctan	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$



6.3 Applications

Méthode 1

Pour montrer une **formule** faisant apparaître des fonctions trigonométriques réciproques, on doit :

- donner le domaine de définition de la formule,
- introduire une fonction f telle que la formule revienne à montrer que cette fonction est nulle,
- étudier le domaine de dérivabilité de f et montrer que f' est nulle,
- en déduire que f est constante sur chaque intervalle de son domaine de dérivabilité et, si besoin, utiliser un argument de continuité pour montrer que f est constante sur chaque intervalle de son domaine de définition,
- prendre une ou des valeurs pour montrer que la ou les constantes sont nulles.

➪ **Exemple 10 :** Montrer que :

$$\forall x \in [-1,1],\ \operatorname{Arcsin}(x) + \operatorname{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2}.$$

➪ **Exemple 11 :** Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \text{ Arctan}\, x + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = sgn(x).\frac{\pi}{2}$$

où sgn(x) est le signe de x.

Proposition 25

Soit $x \in [-1, 1]$,

$$\cos(\text{Arccos}\,(x)) = x, \quad \sin(\text{Arccos}\,(x)) = \sqrt{1-x^2}, \quad \text{si } x \neq 0, \tan(\text{Arccos}\,(x)) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$\cos(\text{Arcsin}\,(x)) = \sqrt{1-x^2}, \quad \sin(\text{Arcsin}\,(x)) = x, \quad \text{si } |x| \neq 1, \tan(\text{Arcsin}\,(x)) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(\text{Arctan}\,(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \sin(\text{Arctan}\,(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \tan(\text{Arctan}\,(x)) = x$$

Remarque : Il faut bien faire attention au sens de la composition et au domaine.

Preuve.

□

➪ **Exemple 12 :** Représenter la fonction :

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \operatorname{Arcsin}(\sin x) \end{array}$$

Méthode 2

Pour **résoudre une équation** (E) faisant apparaître des fonctions trigonométriques réciproques, on doit :

- donner le domaine de définition de l'équation (E),
- raisonner par analyse-synthèse,
- dans l'analyse :
  - appliquer une fonction trigonométrique bien choisie à l'équation (E) pour en déduire une équation (E'),
  - raisonner par équivalences pour résoudre (E'),
  - conclure l'analyse,
- dans la synthèse :
  - considérer les solutions obtenues à la fin de l'analyse,
  - remonter les équivalences pour en déduire qu'elles vérifient (E'),
  - étudier des appartenances à des ensembles bien choisis pour vérifier si on peut ou non "enlever" les fonctions trigonométriques introduites dans l'analyse et ainsi vérifier (E).

➪ **Exemple 13 :** Résoudre l'équation suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{Arcsin}\frac{4}{5} + \operatorname{Arcsin}\frac{5}{13} = \operatorname{Arcsin} x.$$

➪ **Exemple 14 :** Résoudre l'équation suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arcsin} \sqrt{1 - x^2} = \frac{\pi}{2}.$$