Chapitre 2 : Etude de fonctions, fonctions logarithmes, exponentielle et puissances

Dans tout le chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

I Continuité

Définition 1

Soit D une partie de $\mathbb{R}$.
Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $a \in D$.
On dit que f est continue en a si et seulement si :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

On dit que f est continue sur D si et seulement si f est continue en tout point de D.

Remarque :

- La continuité est avant tout est une notion locale : on étudie le comportement de la fonction au voisinage d'un point.
- L'interprétation de la continuité disant que "la courbe est obtenue sans lever le crayon" n'est vraie que sur les intervalles (parties de $\mathbb{R}$ "en un seul morceau"). Ainsi, la fonction inverse $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ même si on doit "lever le crayon" en 0. Le point 0 pose un problème de définition mais pas un problème de continuité.

En pratique, on justifie la continuité d'une fonction par des opérations sur des fonctions continues. Il est vraie qu'une fonction dérivable et continue mais il est inutile d'utiliser cet argument dans les cas pratiques.

Proposition 1

Soient D_1 et D_2 des parties de $\mathbb{R}$.

- Soient $f : D_1 \to \mathbb{R}$ et $g : D_1 \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur D_1. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
  Les fonctions $\lambda f + \mu g$ (combinaison linéaire de f et g) et fg (produit de f et g) sont continues sur D_1.
  Si, de plus, g ne s'annule pas sur D_1, la fonction $\dfrac{f}{g}$ (quotient de f et g) est continue sur D_1.
- Soient $f : D_1 \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur D_1 et $g : D_2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur D_2 telles que pour tout $x \in D_1$, $f(x) \in D_2$.
  La fonction $g \circ f$ est continue sur D_1.

Formule 1

Fonction $f : x \mapsto$	Ensemble de continuité
x^n, $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$
x^n, $n \in \mathbb{Z}^-$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$

II Dérivation

2.1 Définition

Définition 2

On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in I$ ssi le taux d'accroissement $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie quand x tend vers a. On appelle alors dérivée de f en a et on note $f'(a)$ cette limite :

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

On dit que f est dérivable sur I ssi f est dérivable en tout point de I, et on définit la fonction dérivée de f, notée f', par :

$$f' : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{array}.$$

Remarque : On a :

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) \text{ et } \lim_{h\to 0}(a+h) = a.$$

Ainsi, par composition des limites :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a).$$

Proposition 2

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in I$, alors le graphe de f admet une tangente au point $(a, f(a))$, d'équation :

$$y = f(a) + f'(a)(x-a).$$

2.2 Premières dérivées usuelles

Formule 2

Fonction $f : x \mapsto$	Dérivée $f' : x \mapsto$	Ensemble de validité
$x^n,\ n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^{+*}$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$

2.3 Opérations sur les dérivées

Proposition 3 : Opérations sur les fonctions dérivables

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $f+g$, (λf), fg sont dérivables sur I et si g ne s'annule pas sur I, $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I avec

$$(f+g)' = f'+g' \qquad (\lambda f)' = \lambda f' \qquad (fg)' = f'g + fg' \qquad \left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Proposition 4 : Dérivée d'une fonction composée

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ non vides et non réduits à un point.
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I et $g : J \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur J telles que pour tout $x \in I$, $f(x) \in J$. Alors $g \circ f$ est dérivable sur I et :

$$\forall x \in I,\ (g \circ f)'(x) = f'(x).g'\big(f(x)\big).$$

Remarque : Cette proposition est le résultat général de composition. Il permet de retrouver les cas particuliers classiques.

- Soit u une fonction dérivable à valeurs dans $\mathbb{R}$, soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors u^n est dérivable et :

$$(u^n)' = nu'.u^{n-1}.$$

  On a appliqué la proposition précédente à : $g : x \mapsto x^n$ et $f = u$.
- Soit u une fonction dérivable à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$, alors $\sqrt{u}$ est dérivable et :

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$

  On a appliqué la proposition précédente à : $g : x \mapsto \sqrt{x}$ et $f = u$.
- Soit u une fonction dérivable à valeurs dans $\mathbb{R}^*$, alors $\frac{1}{u}$ est dérivable et :

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}.$$

  On a appliqué la proposition précédente à : $g : x \mapsto \frac{1}{x}$ et $f = u$.
- Soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, soient $a, b \in \mathbb{R}$. La dérivée de $h : x \mapsto g(ax+b)$ est :

$$h' : x \mapsto ag'(ax+b).$$

  On a appliqué la proposition précédente à : $f : x \mapsto ax+b$.

➪ **Exemple 1 :** Posons $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x^2}{x^2+1}}$. Etudier la dérivabilité et calculer la dérivée de f.

2.4 Dérivées d'ordre supérieur

Définition 3

Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

- On pose $f^{(0)} = f$.
- Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que la fonction $f^{(k)} : I \to \mathbb{R}$ existe et qu'elle est dérivable sur I. On note alors $f^{(k+1)}$ la fonction dérivée de $f^{(k)}$, c'est à dire : $f^{(k+1)} = (f^{(k)})'$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, si la fonction $f^{(n)} : I \to \mathbb{R}$ existe, on dit alors f est n fois dérivable sur I et la fonction $f^{(n)}$ est appelée dérivée n-ième de f sur I.
On dit que f est indéfiniment dérivable sur I si f est n-fois dérivable sur I pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque :

- Cette définition permet de ne par écrire trop de symboles "prime". On a :

$$f^{(1)} = f', f^{(2)} = f'', f^{(3)} = f''', f^{(4)} = f'''', \dots$$

- Il ne faut pas confondre f^n qui désigne la puissance n et $f^{(n)}$ qui désigne la dérivée n-ième.

➪ **Exemple 2 :** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$. Calculer $f^{(n)}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Définition 4

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I ssi f est n-fois dérivable sur I, et $f^{(n)}$ est continue sur I.
  On note $\mathcal{C}^n(I)$ ou $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$.
- On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I ssi pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.
  On note $\mathcal{C}^\infty(I)$ ou $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Remarque : En particulier, une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ est une fonction dérivable dont la dérivée est continue.

2.5 Lien avec la continuité

Proposition 5

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur I, alors elle est continue sur I.

Remarque :

- La réciproque est fausse : la fonction racine carrée est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.
- Si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}$ est dérivable et donc est continue.

2.6 Tableau de variations

Proposition 6 : Signe de la dérivée et variations

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I.

- f est constante ssi $f' = 0$.
- f est croissante ssi $f' \geq 0$.
- f est décroissante ssi $f' \leq 0$.
- Si $f' \geq 0$ et ne s'annule qu'en un nombre fini de points alors f est strictement croissante.
- Si $f' \leq 0$ et ne s'annule qu'en un nombre fini de points alors f est strictement décroissante.

Remarque :

- L'hypothèse d'intervalle est fondamentale ici. Par exemple, si $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0.$$

  Cependant f n'est pas strictement décroissante sur $\mathbb{R}^*$. Par contre f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$ qui sont des intervalles.

- Dans le cas de la stricte monotonie, la dérivée peut s'annuler en un nombre fini de points. Par exemple, posons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 3x^2.$$
On a donc :
$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) > 0 \text{ et } f'(0) = 0.$$
On peut donc conclure que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Corollaire 1

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I.
- Si $f' > 0$ alors f est strictement croissante.
- Si $f' < 0$ alors f est strictement décroissante.

III Bijectivité

3.1 Généralités

Définition 5 : Bijection

Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$. Soit $f : A \to B$.
On dit que f est bijective ou que f est une bijection ssi :
$$\forall y \in B,\ \exists! x \in A,\ \ y = f(x),$$
c'est-à-dire ssi tout élément de B admet un unique antécédent par f (dans A).

Définition 6 : Bijection réciproque

Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$. Soit $f : A \to B$ une bijection.
On appelle bijection réciproque de f et on note f^{-1} la fonction de B dans A qui, à tout élément de B, associe son unique antécédent par f (dans A).

➪ **Exemple 3 :** Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x+1 \end{array}$. Montrer que f est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

Proposition 7

Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ et $f : A \to B$ une bijection. Alors :
- $$\forall x \in A,\ f^{-1}(f(x)) = x$$
$$\forall x \in B,\ f(f^{-1}(x)) = x$$
- $f^{-1} : B \to A$ est bijective et on a : $(f^{-1})^{-1} = f$.

Remarque : Soit $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x+1 \end{array}$. D'après l'exemple précédent f est bijective et on a : $f^{-1}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x-1 \end{array}$. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a bien :

- $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x+1) = (x+1)-1 = x$
- $f(f^{-1}(x)) = f(x-1) = (x-1)+1 = x$.

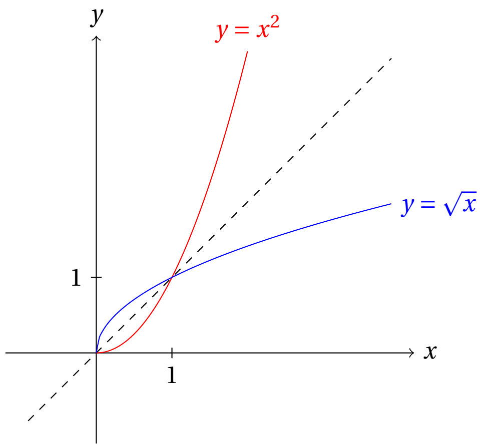
Proposition 8 : Graphe de la réciproque

Dans un repère orthonormé, les graphes d'une bijection f et de sa réciproque f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite $y = x$ (première bissectrice).

Preuve. Notons G_1 le graphe de f et G_2 le graphe de f^{-1}.
Soient $x \in A$ et $y \in B$. On a :

$$\begin{aligned} (x,y) \in G_1 &\Leftrightarrow y = f(x) \\ &\Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \\ &\Leftrightarrow (y,x) \in G_2. \end{aligned}$$

Or le point de coordonnées (y,x) est le symétrique du point de coordonnées (x,y) par rapport à la droite $y = x$.
Donc G_2 est le symétrique de G_1 par rapport à la droite $y = x$. □



Les courbes représentatives des fonctions $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ et $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

3.2 Cas des fonctions continues et strictement monotones

Commençons par rappeler le théorème des valeurs intermédiaires et ses conséquences qui nous seront utiles pour étudier la bijectivité.

Théorème 1 : Théorème des valeurs intermédiaires

Soit I un intervalle. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $a, b \in I$ tels que $a < b$. Alors, pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = y$.

Remarque : Le théorème des valeurs intermédiaires est un théorème d'existence et pas d'unicité.

Proposition 9 : Généralisations du théorème des valeurs intermédiaires

- Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a < b$. Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue admettant une limite (finie ou infinie) en a et en b.
  Soit $y \in] \lim\limits_{x \to a} f(x), \lim\limits_{x \to b} f(x)[$ ou $] \lim\limits_{x \to b} f(x), \lim\limits_{x \to a} f(x)[$, alors :
  $$\exists c \in]a, b[, \ f(c) = y.$$
- Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue admettant une limite (finie ou infinie) en a.
  Soit $y \in] \lim\limits_{x \to a} f(x), f(b)]$ ou $[f(b), \lim\limits_{x \to a} f(x)[$, alors :
  $$\exists c \in]a, b], \ f(c) = y.$$
- Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a < b$. Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue admettant une limite (finie ou infinie) en b.
  Soit $y \in] \lim\limits_{x \to b} f(x), f(a)]$ ou $[f(a), \lim\limits_{x \to b} f(x)[$, alors :
  $$\exists c \in [a, b[, \ f(c) = y.$$

Corollaire 2 : Théorème de la bijection

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur I, soient $a, b \in I$ tels que $a < b$.
Soit y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors :
$$\exists! c \in [a, b], \ f(c) = y.$$

Proposition 10

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

- Si f est strictement croissante, alors f est bijective de $[a, b]$ vers $[f(a), f(b)]$.
- Si f est strictement décroissante, alors f est bijective de $[a, b]$ vers $[f(b), f(a)]$.

Proposition 11

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue.

- Si f est strictement croissante, alors f est bijective de $]a, b[$ vers $] \lim\limits_{a} f, \lim\limits_{b} f[$.
- Si f est strictement décroissante, alors f est bijective de $]a, b[$ vers $] \lim\limits_{b} f, \lim\limits_{a} f[$.

Méthode 1

En pratique, pour montrer qu'une fonction $f : I \to J$ est bijective :

- soit on utilise les propositions précédentes,
- soit, on montre que pour tout $y \in J$, l'équation $y = f(x)$ admet une unique solution $x \in I$ (x sera exprimé en fonction de y). Ceci nous permet d'obtenir une expression de la bijection réciproque : $f^{-1}(y) = x$.

➪ **Exemple 4 :** 1. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x + \ln(x) + 2 \end{array}$. Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}^{+*}$ vers un intervalle que l'on précisera.

2. Soit $\begin{array}{rccc} f: & [0,+\infty[& \to &]0,1] \\ & x & \mapsto & \dfrac{1}{1+x^2} \end{array}$. Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1}.

Proposition 12

Soit $f : A \to B$ une fonction bijective et strictement monotone. Alors f^{-1} est strictement monotone de même sens que f.

Preuve. Supposons f strictement croissante.
Soient $y_1, y_2 \in B$ tels que $y_1 < y_2$.
Si $f^{-1}(y_1) > f^{-1}(y_2)$, alors, comme f est strictement croissante, $f(f^{-1}(y_1)) > f(f^{-1}(y_2))$ donc $y_1 > y_2$ ce qui est absurde.
Si $f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2)$, alors $f(f^{-1}(y_1)) = f(f^{-1}(y_2))$ donc $y_1 = y_2$ ce qui est absurde.
Donc $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$, ainsi f^{-1} est strictement croissante.
On raisonne de même dans le cas où f est strictement décroissante. □

3.3 Cas particulier : puissances et racines

Proposition 13

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, posons : $\begin{array}{rccc} f_n: & \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ & x & \mapsto & x^n \end{array}$ si n est pair, $\begin{array}{rccc} f_n: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^n \end{array}$ si n est impair.
Alors f_n est bijective et on note sa bijection réciproque :
$\begin{array}{rccc} f_n^{-1}: & \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ & x & \mapsto & \sqrt[n]{x} = x^{1/n} \end{array}$ si n est pair, $\begin{array}{rccc} f_n^{-1}: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sqrt[n]{x} = x^{1/n} \end{array}$ si n est impair.

Remarque :

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ impair, soient $x, y \in \mathbb{R}$, on a :
$$y = x^n \iff x = \sqrt[n]{y}.$$
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ pair, soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}^+$, on a :
$$y = x^n \iff x = \pm\sqrt[n]{y}.$$

Preuve. Supposons n pair. On a :
- f_n est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}^+$,
- f_n est dérivable et : $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f_n'(x) = nx^{n-1}$ ainsi :
$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ f_n(x) > 0 \text{ et } f_n(0) = 0.$$

Donc f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
Donc f_n est bijective de $\mathbb{R}^+$ vers $[f(0), \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)[= \mathbb{R}^+$.
On raisonne de même quand n est impair. □

3.4 Dérivation de la bijection réciproque

Proposition 14

Soit $f : I \to J$ une bijection dérivable sur I. Alors :

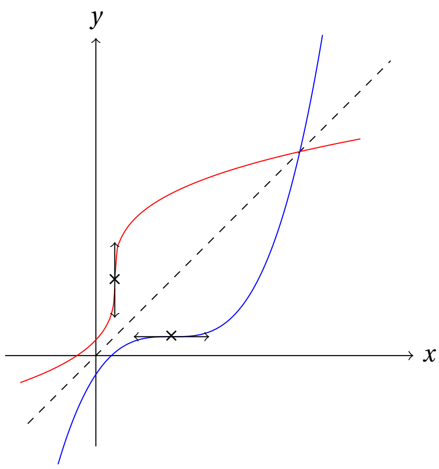
$$f^{-1} : J \to I \text{ est dérivable sur } J \text{ si et seulement si } f' \text{ ne s'annule pas sur } I$$

et dans ce cas :

$$\forall x \in J,\ (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Remarque :

- L'annulation de la dérivée de f correspond à l'existence d'une tangente horizontale. Pour f^{-1}, cette tangente devient verticale, c'est pourquoi il y a un problème de non dérivabilité.



- La preuve de ce résultat sera faite ultérieurement. En admettant la dérivabilité, on peut voir que, comme : $\forall x \in J$, $f(f^{-1}(x)) = x$ donc, par dérivation d'une composition de fonction :

$$\forall x \in J,\ (f^{-1})'(x).f'(f^{-1}(x)) = 1.$$

D'où la formule, par quotient.

➪ **Exemple 5 :** • On pose : $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 + x. \end{array}$ Étudier la bijectivité de f et la dérivabilité de f^{-1}.

- On pose : $\begin{array}{rccl} f: & [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{e^x}{x}. \end{array}$ Étudier la bijectivité de f et la dérivabilité de f^{-1}.

Proposition 15

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $h_n : x \mapsto \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$ est dérivable sur $A = \mathbb{R}^{+*}$ si n est pair et sur $A = \mathbb{R}^*$ si n est impair et on a :

$$\forall x \in A,\ h_n'(x) = \frac{1}{n} x^{(1/n)-1}$$

Preuve. Posons : $\begin{array}{rccl} f_n: & \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{+*} \\ & x & \longmapsto & x^n \end{array}$ si n est pair, $\begin{array}{rccl} f_n: & \mathbb{R}^{*} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{*} \\ & x & \longmapsto & x^n \end{array}$ si n est impair.

Supposons n pair. On a :

- f_n est bijective et $h_n = f_n^{-1}$,
- f_n est dérivable et : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f_n'(x) = nx^{n-1} \neq 0$.

Donc h_n est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$ et, soit $x \in \mathbb{R}^{*+}$,

$$h_n'(x) = \frac{1}{f_n'(h_n(x))} = \frac{1}{nh_n(x)^{n-1}} = \frac{1}{n(x^{1/n})^{n-1}} = \frac{1}{nx^{(n-1)/n}} = \frac{1}{nx^{1-1/n}} = \frac{1}{n}x^{(1/n)-1}.$$

On raisonne de même quand n est impair. □

IV Fonctions logarithmes, exponentielle, puissances

4.1 Fonction logarithme népérien

Définition 7

On appelle fonction logarithme népérien et on note ln l'unique primitive sur $\mathbb{R}^{+*}$ de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ qui s'annule en 1, ce qui s'écrit aussi :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

Remarque :

- Par définition, $x \mapsto \ln(x)$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Cependant, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$, elle admet donc des primitives sur $\mathbb{R}^*$. La fonction $F : x \mapsto \ln(|x|)$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$. En effet :
  - Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $F(x) = \ln(x)$ et $F'(x) = \dfrac{1}{x}$.

– Soit $x \in \mathbb{R}^{-*}$, $F(x) = \ln(-x)$ et $F'(x) = \dfrac{-1}{-x} = \dfrac{1}{x}$.

Proposition 16

- $\ln$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.
- $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$

Preuve.

- Par définition, $\ln$ est dérivable et $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.
  Comme $x \mapsto \frac{1}{x}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ alors $\ln$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$ donc $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

□

Corollaire 3

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $u : I \to \mathbb{R}^{+*}$ une fonction dérivable. Alors $\ln \circ u$ est dérivable sur I et :

$$\forall x \in I,\ (\ln \circ u)'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Proposition 17

- $\forall x, y \in \mathbb{R}^{+*}$, $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.
- $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln(x)$.
- $\forall x, y \in \mathbb{R}^{+*}$, $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$.
- $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\ln(x^n) = n\ln(x)$.
- $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n}\ln(x)$.

Preuve.

- Soit $y \in \mathbb{R}^{+*}$. On pose $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(xy) - \ln(x) - \ln(y) \end{array}$. g est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ g'(x) = \frac{y}{xy} - \frac{1}{x} - 0 = 0.$$

  Ainsi, g est constante sur $\mathbb{R}^{+*}$. Comme $g(1) = \ln(y) - \ln(1) - \ln(y) = 0$, g est constante nulle.
  On en déduit : $\forall x, y \in \mathbb{R}^{+*}$, $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.
- Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$. En appliquant le point précédent à x et $\frac{1}{x}$, on a :

$$\ln(x) + \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \ln\left(\frac{x}{x}\right) = \ln(1) = 0.$$

  Ainsi :

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x).$$

- Soient $x, y \in \mathbb{R}^{+*}$. En appliquant le premier point à x et $\frac{1}{y}$, on a :

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y),$$

  d'après le point précédent.
- Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$.
  – Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ln(x^n) = n\ln(x)$.
    * Pour $n = 0$, $\ln(x^0) = \ln(1) = 0 = 0 \times \ln(x)$.
    * Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\ln(x^n) = n\ln(x)$.
      On a $\ln(x^{n+1}) = \ln(x^n \times x) = \ln(x^n) + \ln(x)$. Ainsi, par hypothèse de récurrence, on obtient : $\ln(x^{n+1}) = n\ln(x) + \ln(x) = (n+1)\ln(x)$.

    On a donc montré par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ln(x^n) = n\ln(x)$.

– Soit $n \in \mathbb{Z}^{-*}$. D'après les points précédents, on a :

$$\ln(x^n) = \ln\left(\frac{1}{x^{-n}}\right) = -\ln(x^{-n}).$$

Comme $-n \in \mathbb{N}$, on a, d'après ce qui précède :

$$\ln(x^n) = -(-n)\ln(x) = n\ln(x).$$

- Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$, on a :

$$\ln(x) = \ln((\sqrt[n]{x})^n) = n\ln(\sqrt[n]{x}).$$

Ainsi :

$$\ln(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n}\ln(x).$$

□

Proposition 18

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$$

Preuve.

- La fonction ln est croissante, donc, par le théorème de la limite monotone, soit elle admet une limite finie l en $+\infty$, soit elle tend vers $+\infty$ (si elle n'est pas majorée).
Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\ln(2^n) = n\ln(2)$ et $\ln(2) > 0$, donc $\lim_{n\to+\infty} \ln(2^n) = +\infty$. La fonction ln n'est donc pas majorée. On a donc $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$
- On a $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty$ donc par composition des limites $\lim_{x\to 0^+} \ln\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$.
Or, pour tout $x \in \mathbb{R}+*$, $\ln(x) = -\ln\left(\frac{1}{x}\right)$. Ainsi, $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$.
- La fonction ln est dérivable en 1 donc on a :

$$\frac{\ln x}{x-1} = \frac{\ln(x)-\ln(1)}{x-1} \underset{x\to 1}{\longrightarrow} \ln'(1) = 1.$$

- Soit $x > 1$. Soit $t \in [1, x]$, on a $0 < \sqrt{t} \leq t$ et donc $0 \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{\sqrt{t}}$ puis en intégrant (les bornes étant dans le bon sens),

$$0 \leq \ln x = \int_1^x \frac{dt}{t} \leq \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t}} = [2\sqrt{t}]_1^x = 2\sqrt{x} - 2 \leq 2\sqrt{x}.$$

En divisant par x ($x > 0$), il vient $0 \leq \frac{\ln x}{x} \leq \frac{2\sqrt{x}}{x} = \frac{2}{\sqrt{x}}$. Comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$,par le théorème d'encadrement, on a alors :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

- On a $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{X\to+\infty} \frac{\ln(X)}{X} = 0$ donc par composition des limites $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 0$.
Ainsi $\lim_{x\to 0^+} (-x\ln(x)) = 0$, donc :

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0.$$

□

Corollaire 4

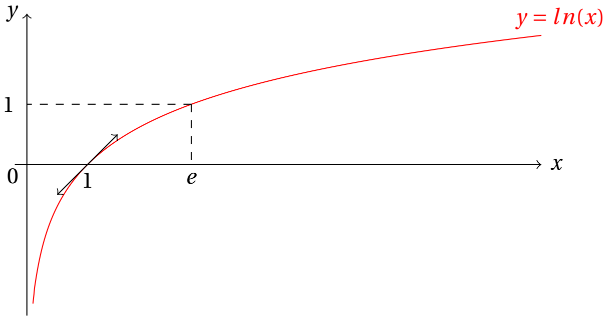
La fonction ln est bijective de $]0; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

Preuve.
ln est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc ln est bijective de $]0; +\infty[$ dans $\left]\lim_{x\to 0^+} \ln(x), \lim_{x\to+\infty} \ln(x)\right[= \mathbb{R}$. □

Définition 8

On note e l'unique élément de $\mathbb{R}^{+*}$ tel que $\ln(e) = 1$.

La courbe représentative de la fonction ln est :



x	0		1		e		$+\infty$
$\ln'(x)$	‖			$+$			
$\ln$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Proposition 19

$$\forall x \in]-1,+\infty[,\ \ln(1+x) \leq x.$$

Preuve.

Posons $f : \begin{array}{ccc}]-1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(1+x)-x. \end{array}$. f est dérivable et, soit $x \in]-1,+\infty[$,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}.$$

Donc f est décroissante sur $[0,+\infty[$ et croissante sur $]-1,0]$ ainsi f admet un maximum en 0. Comme $f(0) = 0$, on a $f \leq 0$. Ainsi :

$$\forall x \in]-1,+\infty[,\ \ln(1+x) \leq x.$$

□

4.2 Logarithme décimal, logarithme en base 2

Définition 9

On appelle logarithme décimal (ou logarithme en base 10) et on note log (ou $\log_{10}$) la fonction $\log : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\ln x}{\ln(10)} \end{array}$ On appelle logarithme en base 2 et on note $\log_2$ la fonction $\log_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\ln x}{\ln(2)} \end{array}$

Remarque :

- On a : $\log(10) = 1$ et $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\log(10^n) = n$.
- On a : $\log_2(2) = 1$ et $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\log_2(2^n) = n$.

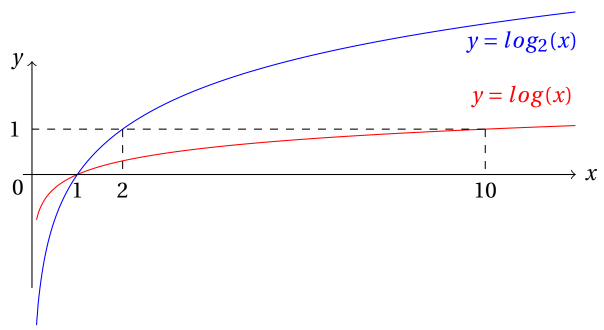
Proposition 20

log et $\log_2$ sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \log'(x) = \frac{1}{x\ln(10)} \text{ et } \log_2'(x) = \frac{1}{x\ln(2)}$$

Donc les fonctions log et $\log_2$ sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}_+^*$.

La courbe représentative des fonctions log et $\log_2$ sont :



x	0		1		10		$+\infty$
$\log'(x)$	‖			$+$			
$\log$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

x	0		1		2		$+\infty$
$\log_2'(x)$	‖			$+$			
$\log_2$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

4.3 Fonction exponentielle

Définition 10

On appelle fonction exponentielle et on note exp la fonction réciproque de la fonction ln.
On a donc : $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$ et :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*},\ y = \exp x \iff x = \ln y.$$

Proposition 21

La fonction exp est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\exp' = \exp$.

Preuve.
La fonction $\ln : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ est bijective, dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\ln'(x) = \frac{1}{x} \neq 0$. Ainsi exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ par le théorème de dérivabilité de la fonction réciproque. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\exp'(x) = \frac{1}{\ln'(\exp(x))} = \frac{1}{\frac{1}{\exp(x)}} = \exp(x).$$

Une récurrence permet de montrer que exp est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. □

Corollaire 5

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Corollaire 6

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $u : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors $\exp \circ u$ est dérivable sur I et :

$$\forall x \in I,\ (\exp \circ u)'(x) = u'(x).\exp(u(x)).$$

Proposition 22

- $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $\exp(x + y) = \exp(x).\exp(y)$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$.
- $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $\exp(x - y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\big(\exp(x)\big)^n = \exp(nx)$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt[n]{\exp(x)} = \exp\left(\frac{x}{n}\right)$.

Preuve.
Soient $x, y \in \mathbb{R}$, on a $\ln(\exp(x + y)) = x + y$ et $\ln(\exp(x)\exp(y)) = \ln(\exp(x)) + \ln(\exp(y)) = x + y$, donc : $\ln(\exp(x + y)) = \ln(\exp(x)\exp(y))$. Ainsi, comme ln est bijective : $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$. Les trois autres points se démontrent de même. □

Proposition 23

$$\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(x)}{x} = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} x\exp(x) = 0.$$

Preuve.

- On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ et comme $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$ est la bijection réciproque de $\ln : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$.
- On a $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ et comme $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$ est la bijection réciproque de $\ln : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$, on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$.
- La fonction exp est dérivable en 0 donc on a :

$$\frac{\exp(x) - 1}{x} = \frac{\exp(x) - \exp(0)}{x - 0} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \exp'(0) = 1.$$

- On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\ln(X)}{X} = 0$, donc, par composition des limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(\exp(x))}{\exp(x)} = 0$, c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\exp(x)} = 0$. Comme $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\dfrac{x}{\exp(x)} > 0$, on a, par passage à l'inverse :

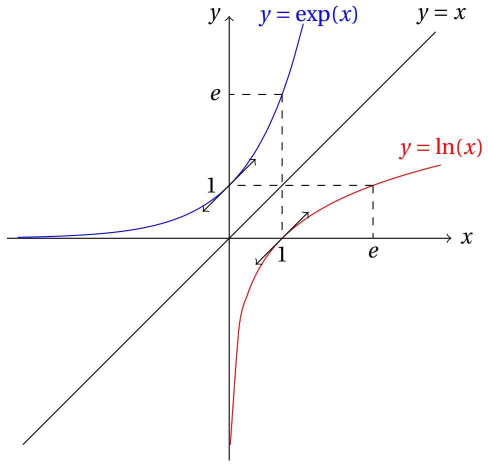
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(x)}{x} = +\infty.$$

- On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} (-x) = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{\exp(X)}{X} = +\infty$, donc, par composition des limites : $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\exp(-x)}{-x} = +\infty$, c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{-x\exp(x)} = +\infty$. Ainsi, par passage à l'inverse :

$$\lim_{x\to-\infty} x\exp(x) = 0.$$

□

La courbe représentative de la fonction exp est :



x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$(\exp)'(x)$				$+$			
exp	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

Proposition 24

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(x) \geq x+1.$$

Preuve.
Posons $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \exp(x)-x-1 \end{array}$. f est dérivable et, soit $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \exp(x)-1.$$

Donc f est croissante sur $[0,+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty,0]$ ainsi f admet un minimum en 0. Comme $f(0)=0$, on a $f \leq 0$. Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(x) \geq x+1.$$

□

4.4 Fonctions puissances

Définition 11

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On appelle fonction puissance d'exposant α la fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^\alpha = \exp(\alpha \ln(x)) \end{array}.$$

Remarque :

- Si $\alpha \in \mathbb{N}$, on peut définir, en utilisant des produits, la fonction puissance sur $\mathbb{R}$.
- Si $\alpha \in \mathbb{Z}^{-*}$, on peut définir, en utilisant des produits et un quotient, la fonction puissance sur $\mathbb{R}^*$.
- La définition générale faisant apparaître un logarithme népérien, la fonction puissance sera définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$, avec cette définition : $e^x = \exp(x\ln(e)) = \exp(x)$. On pourra maintenant utiliser cette notation.

Proposition 25

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^\alpha \end{array}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sa dérivée est $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \alpha x^{\alpha-1} \end{array}$.

Preuve.
On pose $p_\alpha : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{+*} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^\alpha \end{array}$. p_α est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_{+*}$ comme composée de fonctions qui le sont et, soit $x \in \mathbb{R}_{+*}$, on a :
$p'_\alpha(x) = \exp(\alpha\ln(x))\frac{\alpha}{x} = x^\alpha \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$. □

Corollaire 7

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
• Si $\alpha > 0$, la fonction puissance α est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.
• Si $\alpha < 0$, la fonction puissance α est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.
• Si $\alpha = 0$, la fonction puissance α est constante égale à 1 sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Proposition 26

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

- Si $\alpha > 0$, $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$ et $\lim_{x\to0^+} x^\alpha = 0$.
- Si $\alpha < 0$, $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = 0$ et $\lim_{x\to0^+} x^\alpha = +\infty$.

Remarque : Si $\alpha \geq 0$, la fonction puissance α admet une limite finie en 0, on utilise cette limite pour prolonger la fonction.

Définition 12

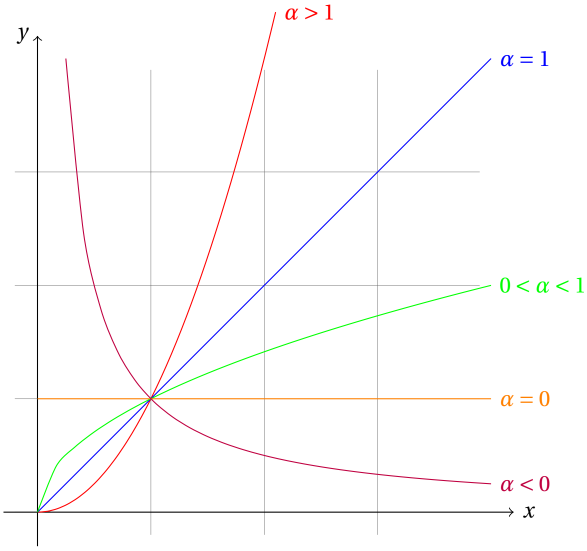
Soit $\alpha \geq 0$, on pose :

$$0^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > 0 \\ 1 & \text{si } \alpha = 0. \end{cases}$$

Proposition 27

Soient $x, y \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On a :

$$(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha, \qquad x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta, \qquad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}, \qquad \ln\left(x^\alpha\right) = \alpha \ln(x)$$



Cas $\alpha > 0$:

x	0		1		$+\infty$
p_α	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Cas $\alpha < 0$:

x	0		1		$+\infty$
p_α	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0

➪ **Exemple 6 :** Etudier la fonction $f : x \mapsto x^{1/x}$.

4.5 Croissances comparées

Proposition 28

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{+*}$. On a :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha |\ln x|^\beta = 0$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} |x|^\beta e^{\alpha x} = 0$.

Remarque : Ce résultat signifie que l'exponentielle l'emporte sur les fonctions puissances qui l'emportent sur le logarithme.

Preuve.

- Soit $x > 1$. On a : $\dfrac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = \left(\dfrac{\ln x}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right)^\beta = \left(\dfrac{\frac{\beta}{\alpha}\ln\left(x^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right)^\beta = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\beta \left(\dfrac{\ln\left(x^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right)^\beta$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{\alpha}{\beta}} = +\infty$ (car $\frac{\alpha}{\beta} > 0$), on en déduit (par composition) que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\left(x^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}} = 0$. Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0$.
- On a $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{(\ln X)^\beta}{X^\alpha} = 0$. Ainsi, par composition, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^\beta}{\left(\frac{1}{x}\right)^\alpha} = 0$.

  Soit $x \in]0,1[$, on a : $\dfrac{\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^\beta}{\left(\frac{1}{x}\right)^\alpha} = x^\alpha (-(\ln x))^\beta = x^\alpha |\ln x|^\beta$. Donc $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha |\ln x|^\beta = 0$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{(\ln X)^\beta}{X^\alpha} = 0$ donc par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln(e^x))^\beta}{(e^x)^\alpha} = 0$ c'est à dire $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^\beta}{e^{\alpha x}} = 0$. De plus, pour tout $x > 0$, $\dfrac{x^\beta}{e^{\alpha x}} > 0$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x =$ et $\lim\limits_{X\to 0} |X|^\alpha |\ln X|^\beta = 0$ donc par composition, $\lim\limits_{x\to-\infty} (e^x)^\alpha |\ln(e^x)|^\beta = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\alpha x}|x|^\beta = 0$.

□