

Chapitre 27 : Fonctions de deux variables

Dans tout ce chapitre $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire euclidien canonique sur $\mathbb{R}^2$ et $\|\cdot\|$ la norme qui lui est associée.

I Ouverts de $\mathbb{R}^2$, fonctions continues

1.1 Ouverts

Définition 1

Soit $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, soit $r > 0$.

- On appelle boule ouverte de centre a et de rayon r et on note $B(a, r)$ l'ensemble :

$$B(a, r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \|(x, y) - (a_1, a_2)\| < r\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, (x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 < r^2\}.$$

- On appelle boule fermée de centre a et de rayon r et on note $B'(a, r)$ l'ensemble :

$$B'(a, r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \|(x, y) - (a_1, a_2)\| \leq r\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, (x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 \leq r^2\}.$$

Définition 2

Soit Ω une partie de $\mathbb{R}^2$. On dit que Ω est ouvert ssi :

$$\forall a \in \Omega, \exists r > 0, B(a, r) \subset \Omega.$$

Remarque : $\mathbb{R}^2$ est ouvert.

Proposition 1

Toute boule ouverte est un ouvert.

Preuve. Soient $a \in \mathbb{R}^2$ et soit $r > 0$. Montrons que $B(a, r)$ est un ouvert.

Soit $b \in B(a, r)$. On a $\|b - a\| < r$.

Posons $r' = r - \|b - a\|$. On a $r' > 0$. Montrons que $B(b, r') \subset B(a, r)$.

Soit $u \in B(b, r')$. On a $\|b - u\| < r'$ et :

$$\|u - a\| = \|u - b + b - a\| \leq \|u - b\| + \|b - a\| < r' + \|b - a\|.$$

Or $r' + \|b - a\| = r$ donc : $\|u - a\| < r$. Ainsi $u \in B(a, r)$. Donc :

$$B(b, r') \subset B(a, r).$$

Ainsi $B(a, r)$ est un ouvert. □

1.2 Limite

Définition 3

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $f \in \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R})$. Soit $l \in \mathbb{R}$. Soit $a = (x_0, y_0) \in \Omega$.

On dit que f tend vers l en a ssi :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall u \in \Omega, \|u - a\| \leq r \Rightarrow |f(u) - l| \leq \varepsilon.$$

On note alors :

$$l = \lim_{u \rightarrow a} f(u) = \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y).$$

Remarque : Cette définition est analogue à celle vue pour les fonctions d'une variable réelle. On admet ici l'unicité de la limite. Les résultats d'opérations restent vrais.

⇔ **Exemple 1 :** Etudier l'existence et la valeur éventuelle d'une limite en $(0, 0)$ pour les fonctions f suivantes :

1. $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2},$
2. $f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}.$

1.3 Continuité

Définition 4

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $f \in \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R})$.

- Soit $a \in \Omega$. On dit que f est continue en a ssi f admet $f(a)$ pour limite en a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall u \in \Omega, \|u - a\| \leq r \Rightarrow |f(u) - f(a)| \leq \varepsilon.$$

- On dit que f est continue sur Ω ssi f est continue en tout point de Ω .
- On note $\mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}^0(\Omega)$ l'ensemble des fonctions continues sur Ω .

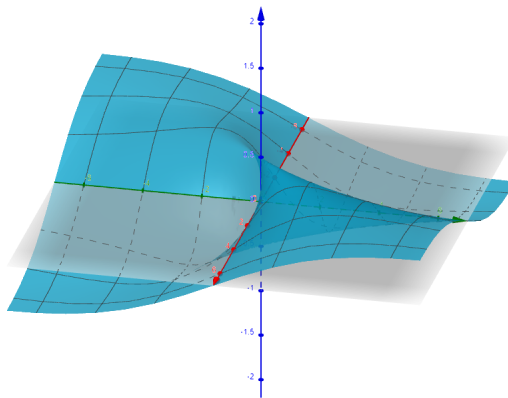
Remarque : Cette définition est analogue à celle vue pour les fonctions d'une variable réelle. Les résultats d'opérations restent donc vrais.

Définition 5

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $f \in \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R})$. Soit $a = (x_0, y_0) \in \Omega$. Posons $D_{x_0} = \{y \in \mathbb{R}, (x_0, y) \in \Omega\}$ et $D_{y_0} = \{x \in \mathbb{R}, (x, y_0) \in \Omega\}$. On appelle respectivement première application partielle en y_0 et deuxième application partielle en x_0 les fonctions de la variable réelle :

$$\begin{array}{ccc} f(., y_0) : D_{y_0} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x, y_0) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} f(x_0, .) : D_{x_0} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & f(x_0, y). \end{array}$$

Remarque : Les applications partielles donnent que des informations dans deux directions privilégiées. Par exemple, soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \frac{xy}{x^2 + y^2}$. Les applications partielles $f(0, .)$ et $f(., 0)$ sont nulles mais f n'est pas nulle au voisinage de $(0, 0)$. En effet, si $x \neq 0, f(x, x) = \frac{1}{2}$.



Proposition 2

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $f \in \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R})$. Soit $a = (x_0, y_0) \in \Omega$. Si f est continue en a alors ses applications partielles sont continues en x_0 et y_0 .

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $r > 0$ tel que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall u \in \Omega, \|u - a\| \leq r \Rightarrow |f(u) - f(a)| \leq \varepsilon.$$

Soit $x \in D_{y_0}$ tel que $|x - x_0| < r$.

On a alors : $\|a - (x, y_0)\| = \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y_0)^2} = |x_0 - x| < r$.

Donc : $|f(x, y_0) - f(a)| \leq \varepsilon$ c'est-à-dire :

$$|f(., y_0)(x) - f(., y_0)(a)| \leq \varepsilon.$$

Ainsi $f(., y_0)$ est continue en x_0 .

On raisonne de même pour $f(x_0, .)$. □

Remarque : La réciproque est fautive. Par exemple, soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Les applications partielles $f(0, .)$ et $f(., 0)$ sont constantes nulles donc sont continues en 0. Mais f n'est pas continue en $(0, 0)$ car : $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x, x) = \frac{1}{2}$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) \neq f(0, 0)$.

⇨ **Exemple 2 :** Etudier la continuité en $(0, 0)$ des fonctions suivantes de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$:

1. $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$,
2. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$,

II Dérivées partielles

2.1 Définition

Définition 6

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $f \in \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R})$. Soit $a = (x_0, y_0) \in \Omega$.

- On dit que f est dérivable en a par rapport à la première variable ssi $f(., y_0)$ est dérivable en x_0 et on note :

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ cette dérivée :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}.$$

- On dit que f est dérivable en a par rapport à la deuxième variable ssi $f(x_0, .)$ est dérivable en y_0 et on note :

$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ cette dérivée :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

- Lorsqu'elles existent, on note $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ les fonctions dérivées partielles.

Remarque :

- Dans les cas simples, le calcul de dérivées partielles se fait comme un calcul de dérivée. Par exemple : $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 + xy + e^y$. On a :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + y \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x + e^y.$$

- L'existence de dérivées partielles n'entraîne pas la continuité. Par exemple : $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 0 \text{ et } y \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Comme $f(., 0)$ et $f(0, .)$ sont nulles, f admet des dérivées partielles en $(0, 0)$ et comme $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x, x) = 1$, f n'est pas continue en $(0, 0)$.

⇨ **Exemple 3 :** Si elles existent, calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes :

1. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$,
2. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^6}{x^2 + (y-x)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

2.2 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Définition 7

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $f \in \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R})$. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω ssi ses dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues sur Ω .
On note $\mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}^1(\Omega)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω .

⇔ **Exemple 4 :** Les fonctions suivantes sont-elles $\mathcal{C}^1$ en $(0, 0)$?

- $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$,
- $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^6}{x^2+(y-x)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

Proposition 3 : Développement limité d'ordre 1

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$. Soit $a = (x_0, y_0) \in \Omega$. On a :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) \underset{(h,k) \rightarrow (0,0)}{=} f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k + o(\|(h, k)\|).$$

Remarque :

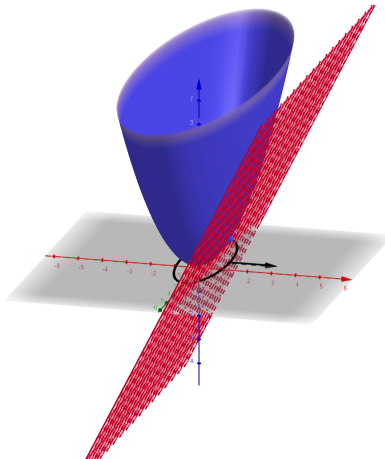
- La preuve est hors programme.
- Le développement limité d'ordre 1 montre que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k$ est une approximation linéaire de $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$.
- On a :

$$f(x, y) \underset{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)}{=} f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + o(\|(x - x_0, y - y_0)\|).$$

Donc, par analogie avec les fonctions d'une variable :

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

est une équation du plan tangent en (x_0, y_0) à la surface $z = f(x, y)$.



Corollaire 1

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Toute fonction $\mathcal{C}^1$ sur Ω est continue sur Ω .

2.3 Gradient

Définition 8

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$. Soit $a = (x_0, y_0) \in \Omega$. On appelle gradient de f en $a = (x_0, y_0)$ et on note $\nabla f(x_0, y_0)$ le vecteur :

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right).$$

Proposition 4 : Développement limité d'ordre 1

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$. Soit $a = (x_0, y_0) \in \Omega$. On a :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) \underset{(h,k) \rightarrow (0,0)}{=} f(x_0, y_0) + \langle \nabla f(x_0, y_0), (h, k) \rangle + o(\|(h, k)\|).$$

Remarque : Le gradient de f en (x_0, y_0) définit la direction dans laquelle f croît le plus vite. En effet :

$$\frac{|f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)|}{\|(h, k)\|} = \frac{|\langle \nabla f(x_0, y_0), (h, k) \rangle|}{\|(h, k)\|} + o(1)$$

et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\frac{|\langle \nabla f(x_0, y_0), (h, k) \rangle|}{\|(h, k)\|} \leq \|\nabla f(x_0, y_0)\|,$$

avec égalité ssi (h, k) est colinéaire à $\nabla f(x_0, y_0)$. Ainsi la pente maximale en valeur absolue est atteinte pour les vecteurs colinéaires au gradient.

III Dérivées partielles et composées

3.1 Dérivée selon un vecteur

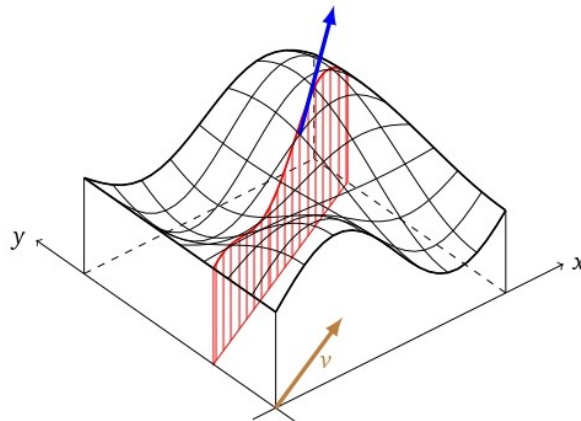
Définition 9

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $f \in \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R})$. Soit $a = (x_0, y_0) \in \Omega$. Soit v un vecteur non nul, $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. On dit que f est dérivable selon le vecteur v ssi l'application $\varphi_v : t \mapsto f(a + tv)$ est dérivable en 0, on appelle alors dérivée en a selon le vecteur v et on note $D_v f(a)$ cette dérivée :

$$D_v f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}.$$

Remarque :

- Les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont les dérivées selon les vecteurs de la base canonique $(1, 0)$ et $(0, 1)$.
- La dérivée selon un vecteur v correspond à la pente de la tangente à la fonction dans la direction du vecteur v .



Proposition 5

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$. Soit $a = (x_0, y_0) \in \Omega$. On a :

$$D_v f(a) = \langle \nabla f(a), v \rangle.$$

Preuve. Soit $v = (v_1, v_2) \in v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, soit t suffisamment petit. On a :

$$\begin{aligned} f(a + tv) &= f(x_0 + tv_1, y_0 + tv_2) \underset{t \rightarrow 0}{=} f(x_0, y_0) + \langle \nabla f(x_0, y_0), t(v_1, v_2) \rangle + o(\|t(v_1, v_2)\|) \\ &\underset{t \rightarrow 0}{=} f(x_0, y_0) + t \langle \nabla f(x_0, y_0), (v_1, v_2) \rangle + o(t) \\ &\underset{t \rightarrow 0}{=} f(a) + t \langle \nabla f(a), v \rangle + o(t). \end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{f(a + tv) - f(a)}{t} \underset{t \rightarrow 0}{=} \langle \nabla f(a), v \rangle + o(1).$$

Ainsi :

$$D_v f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} = \langle \nabla f(a), v \rangle.$$

□

3.2 Règle de la chaîne

Proposition 6

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soient $x, y \in C^1(I, \mathbb{R})$ telles que : $\forall t \in I, (x(t), y(t)) \in \Omega$.

Posons :

$$\begin{aligned} g : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(x(t), y(t)). \end{aligned}$$

Alors $g \in C^1(I, \mathbb{R})$ et :

$$\forall t \in I, g'(t) = x'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)).$$

Preuve. Soit $t \in I$.

$$\begin{aligned} g(t+h) &= f(x(t+h), y(t+h)) \\ &\underset{h \rightarrow 0}{=} f(x(t) + hx'(t) + o(h), y(t) + hy'(t) + o(h)) \\ &\underset{h \rightarrow 0}{=} f(x(t), y(t)) + \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))hx'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))hy'(t) + o(h). \end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{g(t+h) - g(t)}{h} \underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t) + o(1).$$

D'où :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t).$$

Ainsi g est dérivable en t et :

$$g'(t) = x'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)).$$

Comme x, y et f sont C^1 , g' est continue et ainsi $g \in C^1(I, \mathbb{R})$.

□

Remarque :

- On peut également noter :

$$\forall t \in I, \frac{d}{dt}(f(x(t), y(t))) = x'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)).$$

- On considère un arc paramétré $\gamma : \gamma(t) = (x(t), y(t))$. On a :

$$(f \circ \gamma)'(t) = x'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle.$$

Cette formule représente la dérivée de f selon l'arc γ .

- Soit $k \in \mathbb{R}$, la ligne de niveau k est l'ensemble des points pour lesquels f est constante égale à k . Si on considère que cette ligne de niveau est paramétré par un arc γ , on a :

$$\forall t \in I, f \circ \gamma(t) = k.$$

Donc :

$$\forall t \in I, \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = (f \circ \gamma)'(t) = 0.$$

Comme $\gamma'(t)$ dirige la tangente à l'arc γ , c'est-à-dire la tangente à la ligne de niveau, alors : le gradient est orthogonal aux lignes de niveau de la fonction.

Proposition 7

Soit Ω_1 et Ω_2 des ouverts de $\mathbb{R}^2$. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\Omega_1, \mathbb{R})$. Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^1(\Omega_2, \mathbb{R})$ telles que : $\forall (u, v) \in \Omega_2, (\varphi(u, v), \psi(u, v)) \in \Omega_1$.

Posons :

$$\begin{aligned} g : \quad \Omega_2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\mapsto f(\varphi(u, v), \psi(u, v)). \end{aligned}$$

Alors $g \in \mathcal{C}^1(\Omega_2, \mathbb{R})$ et :

$$\begin{aligned} \forall (u, v) \in \Omega_2, \quad \frac{\partial g}{\partial x}(u, v) &= \frac{\partial \varphi}{\partial x}(u, v) \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u, v), \psi(u, v)) + \frac{\partial \psi}{\partial x}(u, v) \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(u, v) &= \frac{\partial \varphi}{\partial y}(u, v) \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u, v), \psi(u, v)) + \frac{\partial \psi}{\partial y}(u, v) \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u, v), \psi(u, v)). \end{aligned}$$

⇔ **Exemple 5 :** Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes :

1. $(x, y) \mapsto f(y, x)$,
2. $(x, y) \mapsto f(x, x)$,
3. $(x, y) \mapsto xyf(xy, x^2)$,
4. $(x, y) \mapsto f(f(x, y), f(y, x))$.

⇔ **Exemple 6 :** Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Calculer les dérivées partielles de : $(r, \theta) \mapsto f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$.

⇔ **Exemple 7 :** Déterminer les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ telles que :

$$2 \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 y.$$

On pourra poser $(u, v) = (x, x + 2y)$.

IV Extremums

Définition 10

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $f \in \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R})$. Soit $a \in \Omega$. On dit que :

- f admet un minimum global en a ssi :

$$\forall u \in \Omega, f(a) \leq f(u),$$

- f admet un maximum global en a ssi :

$$\forall u \in \Omega, f(a) \geq f(u),$$

- f admet un extremum global en a ssi f admet un minimum ou un maximum global en a ,
- f admet un minimum local en a ssi :

$$\exists r > 0, \forall u \in \Omega \cap B(a, r), f(a) \leq f(u),$$

- f admet un maximum local en a ssi :

$$\exists r > 0, \forall u \in \Omega \cap B(a, r), f(a) \geq f(u),$$

- f admet un extremum local en a ssi f admet un minimum ou un maximum local en a .

Définition 11

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $f \in \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R})$. Soit $a \in \Omega$. On dit que a est un point critique de f ssi f admet des dérivées partielles nulles en a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\nabla f(a) = (0, 0).$$

Proposition 8

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$. Soit $a \in \Omega$.

Si f admet un extremum local en a alors a est un point critique de f .

Remarque : Comme pour les fonctions d'une variable, la réciproque est fausse. Par exemple, $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xy$ admet un point critique en $(0, 0)$ mais $(0, 0)$ n'est pas un extremum local car : $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x, x) = x^2 > f(0, 0)$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x, -x) = -x^2 < f(0, 0)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} (x, x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x, -x) = (0, 0)$.

Preuve. Supposons que f admette un maximum local en $a = (x_0, y_0)$. $f(., y_0)$ admet un maximum local en x_0 .

De plus, comme Ω est un ouvert, x_0 n'est pas une extrémité de D_{y_0} . Donc x_0 est un point critique de $f(., y_0)$. Ainsi :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = 0.$$

De même, $\frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$. □

⇔ **Exemple 8 :** Etudier les extremums de :

1. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto (x - y)^2 + x^3 + y^3$,
2. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto (x - y)^2 + x^4 + y^4$.
3. $f : \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto x(\ln x)^2 + y^2$.