Chapitre 26 : Séries numériques

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et les suites considérées seront à valeurs dans $\mathbb{K}$.

I Convergence et divergence

1.1 Définitions

Définition 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

- On appelle série de terme général u_n, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.

  On la note $\sum u_n$ ou $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ ou encore $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, u_n est appelé terme général de la série et S_n est appelée somme partielle d'ordre n.
- On dit que la série $\sum u_n$ converge si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie dans $\mathbb{K}$. Sa limite est alors appelée somme de la série et notée $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$. On a ainsi $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.
- On dit que la série diverge si elle ne converge pas.

Remarque :

- Ne pas confondre la série $\sum u_n$, qui peut converger ou diverger, et la valeur de la somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ dans le cas de convergence.
- ⚠ Attention, la notation $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ est réservée aux séries convergentes.
- Déterminer la nature d'une série, c'est déterminer si elle converge ou diverge. En particulier, deux séries sont dites de même nature si elles sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes.
- Si la suite (u_n) est définie seulement à partir d'un certain rang n_0, on définit les sommes partielles à partir du rang n_0 par :

$$\forall n \geq n_0,\ S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k.$$

  et la série sera notée $\sum\limits_{n\geq n_0} u_n$. Lorsqu'il y a convergence, la somme est notée $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n$.

Définition 2

Soit $\sum u_n$ une série convergente. On note : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ et $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on appelle reste d'ordre n de cette série, l'élément de $\mathbb{K}$ défini par :

$$R_n = S - S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

Remarque : La notion de reste n'a pas de sens pour une série divergente.

1.2 Opérations sur les séries

Proposition 1

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries.

- Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, la série $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n \quad \text{(linéarité de la somme).}$$

- Si $\sum u_n$ est convergente et $\sum v_n$ est divergente, alors $\sum(u_n + v_n)$ est une série divergente.

Remarque : Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont divergentes, alors on ne peut rien dire de $\sum(u_n + v_n)$.

1.3 Divergence grossière

Proposition 2

Si la série $\sum u_n$ converge, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

Remarque :

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, alors, par contraposée, la série associée ne converge pas : on dit qu'elle **diverge grossièrement**.
- ⚠ La convergence vers 0 du terme général est une condition nécessaire mais non suffisante de convergence.

➪ **Exemple 1 :** Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$, appelée série harmonique n'est pas grossièrement divergente mais diverge.

Proposition 3

Soit $\sum u_n$ une série convergente. Alors, $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$.

1.4 Séries télescopiques

Proposition 4

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si la série $\sum(u_{n+1}-u_n)$, appelée série télescopique, converge. On a alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(u_{n+1}-u_n) = \left(\lim_{n\to+\infty} u_n\right) - u_0$$

➪ **Exemple 2 :**
Montrer que la série suivante est convergente et calculer sa somme :

$$\sum_{n\geq 0} \operatorname{Arctan} \frac{1}{n^2+n+1}.$$

1.5 Cas particuliers

Proposition 5 : Séries géométriques

Soit $q \in \mathbb{C}$.
La série $\sum q^n$, appelée série géométrique de raison q, converge si et seulement si $|q| < 1$.
Et dans ce cas :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Proposition 6 : Série exponentielle

Soit $z \in \mathbb{C}$.
La série $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z.$$

➪ **Exemple 3 :**
Montrer que la série suivante est convergente et calculer sa somme :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{n^2+n+1}{n!}.$$

II Séries à termes positifs

Remarque : Dans cette partie, on va étudier la convergence des séries à termes positifs, cependant, quitte à considérer l'opposé, les résultats seront vrais pour les séries à termes négatifs. De façon encore plus générale, il suffira de supposer que le terme général est de signe constant à partir d'un certain rang.

2.1 Convergence des séries à termes positifs

Proposition 7

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs . Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de ses sommes partielles.

- $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
- $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée soit :

$$\sum u_n \text{ converge } \Leftrightarrow \exists M>0, \forall n\in\mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} u_k \leq M.$$

- Si la série $\sum u_n$ diverge, alors on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} u_k = +\infty$.

Notation : Si $\sum u_n$ une série divergente à terme positifs est une série à termes positifs, on pose :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty.$$

Proposition 8

Soient (u_n) et (v_n) des suites telles que : $\forall n\in\mathbb{N}, 0\leq u_n\leq v_n$ alors :

- Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$.
- Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

2.2 Relation d'équivalence

Proposition 9

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries à termes positifs.
Si $u_n \sim v_n$ alors la convergence de $\sum u_n$ est équivalente à celle de $\sum v_n$.
Autrement dit, si $u_n \sim v_n$ alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

2.3 Comparaison série-intégrale

Proposition 10

Soit $f\in\mathcal{C}^0([0,+\infty[)$.

- Si f est décroissante, alors :

$$\forall n\in\mathbb{N}, \int_0^{n+1} f(t)dt \leq \sum_{k=0}^{n} f(k) \leq f(0) + \int_0^{n} f(t)dt.$$

- Si f est croissante, alors :

$$\forall n\in\mathbb{N}, f(0) + \int_0^{n} f(t)dt \leq \sum_{k=0}^{n} f(k) \leq \int_0^{n+1} f(t)dt.$$

➪ **Exemple 4 :** Déterminer un équivalent de :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Corollaire 1 : Comparaison série-intégrale

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue, positive et décroissante.
La série $\sum f(n)$ converge ssi la suite $\left(\int_0^n f(t)\,dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

2.4 Séries de Riemann

Proposition 11 : Séries de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, appelée série de Riemann, converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Remarque : En pratique, pour étudier la convergence d'une série à termes positifs, on se ramène à l'étude d'une série de Riemann.

➪ **Exemple 5 :** Etudier la nature des séries $\sum u_n$ avec :

- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{2+\sin(n)}{\sqrt{n}}$,
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n\left(1 - \cos \frac{1}{n^{3/2}}\right)$,
- $\forall n \geq 2$, $u_n = \sin \frac{1}{n} + \ln \frac{n-1}{n}$.

➪ **Exemple 6 :**

1. Montrer que :
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n.$$
2. Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1).$$
Le réel γ est appelé la constante d'Euler.

Méthode 1 : Comparaison aux séries de Riemann

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.

- S'il existe un réel $\alpha > 1$ tel que $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = 0$, alors $\sum u_n$ converge.
En effet, à partir d'un certain rang, $n^\alpha u_n \leq 1$ donc $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^\alpha}$.
- S'il existe un réel $\alpha \leq 1$ tel que $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = +\infty$, alors $\sum u_n$ diverge.
En effet, à partir d'un certain rang, $n^\alpha u_n \geq 1$ donc $0 \leq \frac{1}{n^\alpha} \leq u_n$.

➪ **Exemple 7 :** Etudier la nature des séries $\sum u_n$ avec :

- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{\ln(n)}{n^2}$,
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \ln^2(n)\left(1 - \cos \frac{1}{n^{3/2}}\right)$.

➪ **Exemple 8 :**
Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, montrer que la série :
$$\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$$
converge ssi :
$$\alpha > 1 \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1).$$
La série $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ est appelée série de Bertrand.

III Séries absolument convergentes

3.1 Convergence absolue

Définition 3

On dit qu'une série $\sum u_n$ à termes réels ou complexes est absolument convergente ou que la suite (u_n) est sommable si et seulement si $\sum |u_n|$ est convergente.

Remarque : On peut écrire qu'une série est absolument convergente ssi $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| < +\infty$.

➪ **Exemple 9 :** Etudier la convergence absolue de la série : $\sum \frac{(-1)^n \sin \frac{1}{n}}{n}$.

Théorème 1

Toute série absolument convergente est convergente.

Remarque :

- Ce résultat permet de se ramener à l'étude d'une série à termes positifs.
- Si la suite (u_n) est sommable, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est appelée la somme de la suite sommable (u_n).

Remarque : La réciproque est fausse : une série peut converger sans converger absolument.

➪ **Exemple 10 :** Montrons que la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ converge mais ne converge pas absolument.

Proposition 12 : Inégalité triangulaire

Si $\sum u_n$ converge absolument, alors :

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

3.2 Comparaison

Proposition 13

Si (u_n) est une suite à valeurs complexes et si (v_n) est une suite d'éléments de $\mathbb{R}^+$, si $u_n = O(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ est absolument convergente, et donc convergente.

Méthode 2 : Utilisation de développements limités

Si :

$$u_n = v_n + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \text{ avec } \alpha > 1.$$

Alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

➪ **Exemple 11 :** En admettant que la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge, montrer que les séries suivantes convergent :

$$\sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) \text{ et } \sum \frac{(-1)^n}{n+\sqrt{n}}.$$

➪ **Exemple 12 :**

Etudier la nature de la série de terme général :

$$u_n = \sqrt{n^4+n+1} - \sqrt{n^4+an},\ a \in \mathbb{R}.$$