Chapitre 25 : Espaces préhilbertiens réels

Dans tout le chapitre, E désignera un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

I Produit scalaire

Définition 1

- On appelle produit scalaire sur E toute application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :
  - φ est bilinéaire :
    $$\forall x \in E,\ \varphi(x,\cdot) \text{ est linéaire c'est-à-dire : } \forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}, \forall y,y',\ \varphi(x,\lambda y+\mu y') = \lambda\varphi(x,y)+\mu\varphi(x,y').$$
    $$\forall y \in E,\ \varphi(\cdot,y) \text{ est linéaire c'est-à-dire : } \forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}, \forall x,x',\ \varphi(\lambda x+\mu x',y) = \lambda\varphi(x,y)+\mu\varphi(x',y),$$
  - φ est symétrique : $\forall (x,y) \in E^2$, $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$,
  - φ est positive : $\forall x \in E$, $\varphi(x,x) \geq 0$,
  - φ est définie : $\forall x \in E$, $\varphi(x,x) = 0 \implies x = 0$.
- Si φ est un produit scalaire sur E et si $(x,y) \in E^2$, le réel $\varphi(x,y)$ est appelé produit scalaire de x et y et est noté $< x,y >$, $(x|y)$ ou $x.y$.

Proposition 1 : Exemples de référence

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ Soit $E = \mathbb{R}^n$. Pour tout $x = (x_1,\dots,x_n)$ et $y = (y_1,\dots,y_n) \in E$, on pose :
  $$< x,y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$
  $<,>$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ appelé produit scalaire canonique.
- Soit $E = \mathcal{C}^0([a,b])$ (avec $a < b \in \mathbb{R}$). Pour tout f et $g \in E$, on pose :
  $$< f,g >= \int_a^b f(t)g(t)dt.$$
  $<\ ,\ >$ définit un produit scalaire sur E souvent appelé produit scalaire usuel sur $\mathcal{C}^0([a,b])$.
- Soit $E = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Pour tout A et $B \in E$, on pose :
  $$< A,B >= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{i,j}.$$
  $<\ ,\ >$ définit un produit scalaire sur E souvent appelé produit scalaire usuel sur E.

Preuve.

- – Soit $x = (x_1,\dots,x_n)$, $y = (y_1,\dots,y_n) \in E$, on a :
  $$< y,x >= \sum_{i=1}^{n} y_i x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i =< x,y >$$
  Ainsi, $<\ ,\ >$ est symétrique.
  – Soient $x = (x_1,\dots,x_n)$, $y = (y_1,\dots,y_n)$, $z = (z_1,\dots z_n) \in E$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. On a :
  $$< \lambda x+\mu y,z >= \sum_{i=1}^{n}(\lambda x_i+\mu y_i)z_i = \sum_{i=1}^{n}(\lambda x_i z_i+\mu y_i z_i) = \lambda\sum_{i=1}^{n} x_i z_i + \mu\sum_{i=1}^{n} y_i z_i = \lambda < x,z > +\mu < y,z > .$$
  Donc $<\ ,\ >$ est linéaire à gauche, donc, par symétrie, est bilinéaire.

  – Soit $x = (x_1,\dots,x_n) \in E$, on a :
  $$< x,x >= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0.$$
  Supposons $< x,x >= 0$. Alors $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$. Comme c'est une somme de réels positifs, ils sont tous nuls et pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $x_i = 0$. Ainsi $x = 0$ et $<\ ,\ >$ est défini-positif.

  En conclusion, $<\ ,\ >$ définit un produit scalaire sur E
- – Soit $(f,g) \in E^2$, on a : $< g,f >= \int_a^b g(t)f(t)dt = \int_a^b f(t)g(t)dt =< f,g >$ donc $<\ ,\ >$ est symétrique.

- Soient $(f,g,h)\in E^3$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned}< \lambda f+\mu g, h> &= \int_a^b (\lambda f(t)+\mu g(t))h(t)dt = \int_a^b (\lambda f(t)h(t)+\mu g(t)h(t))dt\\ &= \lambda\int_a^b f(t)g(t)dt+\mu\int_a^b f(t)h(t)dt = \lambda < f,g> +\mu < f,h>\end{aligned}$$

(par linéarité de l'intégrale) et $< \ , \ >$ est linéaire à gauche, donc, par symétrie, est bilinéaire.

• Soit $f\in E$, on a $< f,f>=\int_a^b f(t)^2dt\geq 0$ (car f^2 est positive et par positivité de l'intégrale).

Supposons $< f,f>=0$. Alors $\int_a^b f(t)^2dt=0$. Comme f^2 est positive et continue, $f^2=0$. Pour $t\in[a,b]$, on a donc : $\forall t\in[a,b],\ f(t)^2=0$ donc : $\forall t\in[a,b],\ f(t)=0$. Ainsi $f=0$ et $< \ , \ >$ est défini-positif.
En conclusion, $< \ , \ >$ définit un produit scalaire sur E.

- De même que pour le premier point.

□

Remarque : Pour le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$: soient $x=(x_1,\dots,x_n)$ et $y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n$.
Posons : $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$. On a :

$$< x,y>=X^T.Y.$$

➪ **Exemple 1 :**

1. On pose :
$$\forall f,g\in\mathcal{C}^0([-1,1]),\ < f,g>=\int_{-1}^1 f(t)g(t)(1-t^2)\,dt.$$
Montrer que $<,>$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0([-1,1])$.
2. On pose :
$$\forall P,Q\in\mathbb{R}_n[X],\ < P,Q>=\sum_{k=0}^n P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0).$$
Montrer que $<,>$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Définition 2

- Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E muni d'un produit scalaire $< \cdot,\cdot >$ est appelé espace préhilbertien réel, et noté $(E,< \cdot,\cdot >)$.
- On appelle espace euclidien, tout espace préhilbertien réel de dimension finie.

Dans toute la suite, on considère $(E,< \ , \ >)$ un espace préhilbertien réel.

II Norme associée à un produit scalaire

2.1 Définition et propriétés

Définition 3

- Pour tout $x\in E$, on appelle norme de x et on note $\|x\|$ le réel positif défini par $\|x\|=\sqrt{< x,x>}$.
- On appelle norme associée au produit scalaire $< \ , \ >$ l'application :

$$\begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R}_+\\ x & \mapsto & \|x\|=\sqrt{< x,x>}.\end{array}$$

- On dit qu'un vecteur $x\in E$ est **unitaire** si et seulement si $||x||=1$.
- Soient $x,y\in E$, on appelle distance entre x et y et on note $d(x,y)$ le réel :

$$d(x,y)=\|x-y\|.$$

Dans toute la suite, on notera $\|\ \|$ la norme associé à ce produit scalaire.
Remarque :

- Sur $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique : pour tout $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, on a $\|x\|=\sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$

- Sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini précédemment pour tout $f \in \mathcal{C}([a,b,\mathbb{R})$, on a $\|f\| = \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt}$.

Proposition 2

La norme $\| \ \|$ associée au produit scalaire $< \ , \ >$ vérifie :
- $\forall x \in E$, $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.
- $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.

Preuve. • Comme le produit scalaire est linéaire à droite, on a : $<0,0>=0$.
La réciproque correspond au caractère défini-positif du produit scalaire.
- Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in E$, on a $\|\lambda x\| = \sqrt{<\lambda x, \lambda x>} = \sqrt{\lambda^2 <x,x>} = |\lambda| \|x\|$ (par bilinéarité).

□

Proposition 3

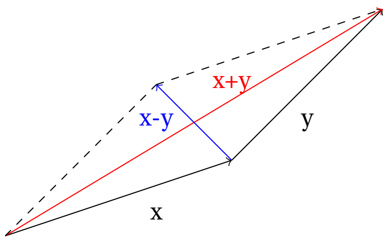
Soient $x, y \in E$, soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a :
- $\|\lambda x + \mu y\|^2 = \lambda^2 \|x\|^2 + 2\lambda\mu <x,y> + \mu^2 \|y\|^2$.
- $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2<x,y> + \|y\|^2$.
- $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2<x,y> + \|y\|^2$.
- Identité du parallélogramme : $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

Preuve. • On développe par bilinéarité

$$\begin{aligned}\|\lambda x + \mu y\|^2 &= <\lambda x + \mu y, \lambda x + \mu y> = \lambda <x, \lambda x + \mu y> + \mu <y, \lambda x + \mu y> = \lambda(\lambda <x,x> + \mu <x,y>) + \mu(\lambda <y,x> + \mu <y,y>) \\ &= \lambda^2 \|x\|^2 + 2\lambda\mu <x,y> + \mu^2 \|y\|^2\end{aligned}$$

avec la symétrie.
• Le second point correspond à $\lambda = \mu = 1$.
• Le troisième point correspond à $\lambda = 1$ et $\mu = -1$.
• En additionnant les deux égalités précédentes, on obtient identité du parallélogramme. □

Remarque : L'égalité du parallélogramme traduit le fait que, dans un parallélogramme, la somme des carrés des longueurs des deux diagonales est égale à la somme des carrés des longueurs des quatre côtés.



Corollaire 1 : Identités de polarisation

Soient $x, y \in E$, on a :

$$<x,y> = \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2).$$

$$<x,y> = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2).$$

Preuve.

$$\frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) = \frac{1}{4}((\|x\|^2 + 2<x,y> + \|y\|^2) - (\|x\|^2 - 2<x,y> + \|y\|^2)) = <x,y>.$$

□

➪ **Exemple 2 :** Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que :

$$\forall x \in E, \ \|f(x)\| = \|g(x)\|.$$

Montrer que :

$$\forall x, y \in E, \ (f(x)|f(y)) = (g(x)|g(y)).$$

2.2 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Proposition 4 : Inégalité de Cauchy-Schwarz

On a :

$$\forall x, y \in E, |<x, y>| \leq \|x\| \|y\|.$$

De plus, cette inégalité est une égalité si, et seulement si, (x, y) est liée.

Remarque :

- dans $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit :

$$\forall (x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n \left| \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}.$$

- dans $E = \mathcal{C}^0([a, b], R)$ muni du produit scalaire usuel, l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit :

$$\forall f, g \in \mathcal{C}^0([a, b]), \left| \int_a^b f(t) g(t) dt \right| \leq \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt} \sqrt{\int_a^b g(t)^2 dt}.$$

➪ **Exemple 3 :** Soient $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}^+$. Montrer que :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k c_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 c_k \right) \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2 c_k \right).$$

➪ **Exemple 4 :** Soient $0 < a < b$, montrer que :

$$\ln b - \ln a \leq \frac{b-a}{\sqrt{ab}}.$$

➪ **Exemple 5 :** $(\star)$

Soit $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + 2y + 3z = 1\}$. Déterminer :

$$\min_{(x,y,z) \in A} (x^2 + y^2 + z^2).$$

- *On considère $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel.*
  On remarque que $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, <(x, y, z), (1, 2, 3)> = 1$.

- *Soit $(x, y, z) \in A$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :*

$$|<(x, y, z), (1, 2, 3)>| \leq \|(x, y, z)\| \|(1, 2, 3)\|.$$

  Donc, en élevant au carré :

$$1 \leq (x^2 + y^2 + z^2).14.$$

  D'où :

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{14}.$$

- *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Posons $(x, y, z) = \lambda(1, 2, 3)$. D'après le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz, on a : $14(x^2 + y^2 + z^2) = (x + 2y + 3z)^2$.*
  De plus :

$$(x, y, z) \in A \Leftrightarrow \lambda + 4\lambda + 9\lambda = 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{14}.$$

  Donc pour $\lambda = \frac{1}{14}$, on a $(x, y, z) \in A$ et $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{14}$.

- *Ainsi :*

$$\min_{(x,y,z) \in A} (x^2 + y^2 + z^2) = \frac{1}{14}.$$

Proposition 5 : Inégalité triangulaire ou inégalité de Minkowski

On a :

$$\forall x, y \in E, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

De plus, cette inégalité est une égalité si et seulement si $y = 0$ ou $\Big($ il existe $\lambda \geq 0$ tel que $x = \lambda y \Big)$.

Corollaire 2 : Deuxième inégalité triangulaire

Soient $x_1,\dots,x_n \in E$
$$\left\|\sum_{k=1}^{n} x_k\right\| \leq \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|.$$

Corollaire 3 : Deuxième inégalité triangulaire

$$\forall x, y \in E, \left|\|x\| - \|y\|\right| \leq \|x-y\|$$

Preuve. Soient $x, y \in E$, on a :
$$\|x\| = \|x-y+y\| \leq \|x-y\| + \|y\|.$$
Donc $\|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|$.
En échangeant les rôles de x et y on a obtient :
$$\left|\|x\| - \|y\|\right| \leq \|x-y\|.$$
□

III Orthogonalité

3.1 Vecteurs orthogonaux, famille orthogonale

Définition 4

On dit que deux vecteurs x et $y \in E$ sont orthogonaux si et seulement si $< x, y >= 0$.

Définition 5

On dit qu'une famille $(e_1,\dots,e_n)$ de vecteurs de E est :

- orthogonale si pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, $< e_i, e_j >= 0$.
- orthonormale (ou orthonormée) si et seulement si cette famille est orthogonale et que : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\|e_i\| = 1$ (vecteurs unitaires), c'est-à-dire si et seulement si :
$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], < e_i, e_j >= \delta_{i,j}.$$

3.2 Propriétés des familles orthogonales

Théorème 1 : Théorème de Pythagore

Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une famille orthogonale de E. Alors
$$\|\sum_{i=1}^{n} e_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|e_i\|^2.$$

Remarque : Le cas particulier $n = 2$ correspond à la version classique du théorème de Pythagore. On considère en effet (e_1, e_2) une famille orthogonale, ainsi le triangle de côtes construits sur e_1 et e_2 est rectangle. On a alors : $\|e_1 + e_2\|^2 = \|e_1\|^2 + \|e_2\|^2$ avec $\|e_1 + e_2\|$ qui est la longueur de l'hypoténuse et $\|e_1\|$ et $\|e_2\|$ qui sont les longueurs des deux autres côtes.

Proposition 6

Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls de E est libre. En particulier, toute famille orthonormale est libre.

Preuve. Soit $(e_1,...,e_n)$ une famille orthogonale de vecteurs non nuls de E. Soit $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0$.
D'après le théorème de Pythagore :
$$0 = \left\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|\lambda_i e_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \|e_i\|^2.$$
Or : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i^2 \|e_i\|^2 \geq 0$.
Donc : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i^2 \|e_i\|^2 = 0$.
Or : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $e_i \neq 0$ donc : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i = 0$.
Ainsi $(e_1,...,e_n)$ est libre.
□

3.3 Orthogonal d'une partie

Définition 6

Soit A une partie de E.
On appelle orthogonal de A, l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à tous les éléments de A. Il est noté $A^{\perp}$.

$$A^{\perp} = \{x \in E,\ \forall y \in A,\ <x, y>= 0\}$$

Soit $x \in E$, on a :

$$x \in A^{\perp} \iff \forall y \in A,\ <x, y>= 0$$

Proposition 7

Soit A une partie de E. $A^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Preuve.

- Soit $x \in A$, $<x, 0>= 0$ donc $0 \in A^{\perp}$ ainsi $A^{\perp} \neq \emptyset$.
- Soient $x, x' \in A^{\perp}$. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Soit $y \in A$. On a $<\lambda x + \mu x', y>= \lambda <x, y> + \mu <x', y>= 0$ donc $\lambda x + \mu x' \in A^{\perp}$.
- Ainsi, $A^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E.

□

Proposition 8

Soit $e_1, ..., e_n \in E$ et $F = \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_n)$. Soient $x \in E$. On a :

$$F^{\perp} = \{x \in E, \forall i \in [\![1, n]\!], <x, e_i>= 0\}.$$

Preuve.

- Soit $x \in F^{\perp}$. Soit $i \in [\![1, n]\!]$, on a $e_i \in F$, donc $<x, e_i>= 0$. Ainsi :
$$F^{\perp} \subset \{x \in E, \forall i \in [\![1, n]\!], <x, e_i>= 0\}.$$
- Réciproquement, supposons que : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $<x, e_i>= 0$.
Soit $y \in F$, il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$. Alors, par bilinéarité $<x, y>= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i <x, e_i>= 0$ et $<x, y>= 0$ donc $x \in F^{\perp}$.
Ainsi :
$$\{x \in E, \forall i \in [\![1, n]\!], <x, e_i>= 0\} \subset F^{\perp}.$$

□

➪ **Exemple 6 :** Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel et soit $F = \{(x, y, z) \in E,\ x + y - z = 0\}$.
Déterminer $F^{\perp}$.

Proposition 9

Soient A et B des parties de E.

- Si $A \subset B$, alors $B^{\perp} \subset A^{\perp}$.
- $A \subset A^{\perp\perp}$.
- $\{0\}^{\perp} = E$ et $E^{\perp} = \{0\}$.
- $A \cap A^{\perp} \subset \{0\}$.

Remarque : Si A est un sous-espace vectoriel de E, alors A et $A^{\perp}$ sont en somme directe.

Preuve.

- Supposons $A \subset B$.
Soit $x \in B^{\perp}$. Soit $y \in A$, on a $y \in B$ car $A \subset B$ donc $<x, y>= 0$.
Ainsi $x \in A^{\perp}$ et donc $F^{\perp} \subset A^{\perp}$.
- Soit $x \in A$, soit $y \in A^{\perp}$,
$$\langle x, y\rangle = 0$$
et on en déduit que $x \in \left(A^{\perp}\right)^{\perp}$. Donc $A \subset A^{\perp\perp}$.
- On a $\{0\}^{\perp} = \{x \in E,\ <x, 0>= 0\} = E$.
De plus, soit $x \in E^{\perp}$ alors tout $y \in E$, $<x, y>= 0$. Alors, en particulier pour $y = x$, on obtient : $<x, x>= 0$ d'où $x = 0$. Ainsi $E^{\perp} = \{0\}$.
- Soit $x \in A \cap A^{\perp}$ alors $<x, x>= 0$ d'où $x = 0$. Donc $A \cap A^{\perp} \subset \{0\}$.

□

➪ **Exemple 7 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire défini par :

$$\forall P, Q \in E, < P, Q >= \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt.$$

Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^{\perp} \setminus \{0\}$.
Calculer le degré de P.

➪ **Exemple 8 :** $(\star)$
Soit $E = \mathcal{C}^0([-1,1])$ muni du produit scalaire défini par :

$$\forall f, g \in E, < f, g >= \int_{-1}^1 f(t)g(t)\,dt.$$

Soient F l'ensemble des fonctions paires de E et G l'ensemble des fonctions impaires de E. Montrer que :

$$F = G^{\perp}.$$

- *Soit $f \in F$, soit $g \in G$.*
  Alors f est paire et g est impaire donc $f.g$ est impaire.
  Comme $[-1,1]$ est centré en 0, on a donc :
  $$< f, g >= \int_{-1}^1 f(t)g(t)\,dt = 0.$$
  Donc $f \in G^{\perp}$. Ainsi $F \subset G^{\perp}$.
- *Soit $f \in G^{\perp}$. Il existe $f_1 \in F$ et $f_2 \in G$ tels que $f = f_1 + f_2$ (en théorie, il faudrait prouver ce résultat mais c'est un classique).*
  Comme $f \in G^{\perp}$, on a $< f, f_2 >= 0$. Donc $< f_1, f_2 > + < f_2, f_2 >= 0$.
  Or $f_1 \in F \subset G^{\perp}$ donc $< f_1, f_2 >= 0$.
  Ainsi $< f_2, f_2 >= 0$ donc $f_2 = 0$.
  D'où $f = f_1 \in F$. Donc $G^{\perp} \subset F$.
- *Ainsi $F = G^{\perp}$.*

➪ **Exemple 9 :** $(\star)$
Soit $(E, < .,. >)$ un espace euclidien. On pose, pour tout $a \in E$:

$$f_a : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & < x, a > \end{array} \quad \text{et} \quad \Phi : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) \\ a & \mapsto & f_a. \end{array}$$

1. Montrer que Φ est un isomorphisme.
2. En déduire que pour toute forme linéaire $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, il existe un unique $a \in E$ tel que :
   $$\forall x \in E, \varphi(x) =< x, a > .$$

1. *Soit $a \in \ker(\Phi)$, on a $f_a = 0$ ainsi : $\forall x \in E$, $f_a(x) =< x, a >= 0$. Donc $a \in E^{\perp}$ ainsi $a = 0$.*
   On a donc $\ker(\Phi) = \{0\}$ donc Φ est injectif.
   De plus $dim(\mathcal{L}(E, \mathbb{R})) = dim(E).dim(\mathbb{R}) = dim(E)$ donc Φ est un isomorphisme.
2. *Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$. Comme Φ est un isomorphisme, il existe un unique $a \in E$ tel que $\varphi = \Phi(a) = f_a$, c'est-à-dire tel que :*
   $$\forall x \in E, \varphi(x) =< x, a > .$$

3.4 Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Théorème 2 : Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille libre de vecteurs de E.
Il existe un unique famille $(f_1, \dots, f_n)$ telle que :

- $(f_1, ..., f_n)$ est orthonormée
- $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\text{Vect}(e_1, \dots, e_i) = \text{Vect}(f_1, \dots, f_i)$
- $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $< e_i, f_i >> 0$.

De plus, on a ;

- $f_1 = \dfrac{e_1}{||e_1||}$
- Posons : $\forall k \in [\![2, n]\!]$, $g_k = e_k - \sum_{i=1}^{k-1} < e_k, f_i > f_i$, alors :
  $$\forall k \in [\![2, n]\!], \ f_k = \frac{g_k}{||g_k||}.$$

Preuve. $(\star)$
Existence :
Par récurrence, on définit pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$g_i = e_i - \sum_{k=1}^{i-1} < e_i, f_k > f_k \quad \text{et} \quad f_i = \frac{g_i}{\|g_i\|}.$$

Montrons par récurrence la propriété suivante :

$$\mathcal{P}(j) : \text{« } f_1, ..., f_j \text{ sont bien définis}$$
$$(f_1, ..., f_j) \text{ est orthonormale}$$
$$\text{Vect}(e_1, ..., e_j) = \text{Vect}(f_1, ... f_j)$$

- Pour $j = 1$: on pose $g_1 = e_1$.
  - Comme $(e_1, ..., e_n)$ est libre, $e_1 \neq 0$ donc $\|g_1\| \neq 0$ donc f_1 est bien défini.
  - De plus, $f_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$. Ainsi, $\|f_1\| = 1$ donc (f_1) est orthonormale.
  - Enfin, $\text{Vect}(f_1) = \text{Vect}\left(\frac{e_1}{\|e_1\|}\right) = \text{Vect}(e_1)$.

  Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- Soit $j \in [\![1, n-1]\!]$, supposons $\mathcal{P}(j)$ vraie.
  - Par hypothèse de récurrence, on sait déjà que $f_1, ..., f_j$ sont bien définis.
    Supposons $g_{j+1} = 0$. Alors $e_{j+1} = \sum_{k=1}^{j} < e_{j+1}, f_k > f_k$. Donc $e_{j+1} \in \text{Vect}(f_1, ..., f_j) = \text{Vect}(e_1, ..., e_j)$ par hypothèse de récurrence. Ce qui est absurde car $(e_1, ..., e_{j+1})$ est libre (sous famille d'une famille libre).
    Ainsi, $g_{j+1} \neq 0$ donc f_{j+1} est bien défini.
  - Par hypothèse de récurrence, on sait déjà que $(f_1, .., f_j)$ est orthonormale.
    De plus, soit $k \in [\![1, j]\!]$, on a :

$$\begin{aligned}
< f_{j+1}, f_k > &=< \frac{g_{j+1}}{\|g_{j+1}\|}, f_k > \\
&= \frac{1}{\|g_{j+1}\|} < e_{j+1} - \sum_{l=1}^{j} < e_{j+1}, f_l > f_l, f_k > \\
&= \frac{1}{\|g_{j+1}\|} \left(< e_{j+1}, f_k > - \sum_{l=1}^{j} < e_{j+1}, f_l >< f_l, f_k > \right) \\
&= \frac{1}{\|g_{j+1}\|} \left(< e_{j+1}, f_k > - \sum_{l=1}^{j} < e_{j+1}, f_l > \delta_{k,l} \right) \quad \text{car } (f_1, ..., f_j) \text{ orthonormée} \\
&= \frac{1}{\|g_{j+1}\|} \left(< e_{j+1}, f_k > - < e_{j+1}, f_k > \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

    De plus, $\|f_{j+1}\| = 1$ donc $(f_1, ..., f_{j+1})$ est orthonormale.
  - On a :

$$\begin{aligned}
\text{Vect}(f_1, ..., f_{j+1}) &= \text{Vect}(f_1, ..., f_j, \frac{g_{j+1}}{\|g_{j+1}\|}) \\
&= \text{Vect}(f_1, ..., f_j, g_{j+1}) \\
&= \text{Vect}(f_1, ..., f_j, e_{j+1} - \sum_{k=1}^{j} < e_{j+1}, f_k > f_k)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Vect}(f_1, ..., f_{j+1}) &= \text{Vect}(f_1, ..., f_j, e_{j+1}) \\
&= \text{Vect}(f_1, ..., f_j) + \text{Vect}(e_{j+1}) \\
&= \text{Vect}(e_1, ..., e_j) + \text{Vect}(e_{j+1}) \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= \text{Vect}(e_1, ..., e_{j+1})
\end{aligned}$$

  Donc $\mathcal{P}(j+1)$ est vraie.
- On a donc prouvé que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $\mathcal{P}(j)$ est vraie.

De plus, soit $i \in [\![1,n]\!]$, on a :

$$\begin{aligned}
<e_i, f_i> &= <e_i - g_i + g_i, f_i> \\
&= <\sum_{l=1}^{i-1} <e_i, f_l> f_l, f_i> + <g_i, f_i> \\
&= \sum_{l=1}^{i-1} <e_i, f_l><f_l, f_i> + <f_i \|f_i\|, f_i> \\
&= \sum_{l=1}^{i-1} <e_i, f_l> \delta_{i,l} + \|f_i\| <f_i, f_i> \\
&= \|f_i\|^2 > 0
\end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve de l'existence.

Unicité : Soient $(f_1, .., f_n)$ et $(h_1, ..., h_n)$ deux familles vérifiant les 3 conditions.
Soient $k \in [\![1,n]\!]$, on a : $\mathrm{Vect}(f_1, ..., f_k) = \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_k) = \mathrm{Vect}(h_1, ..., h_k)$.
Or, $h_k \in \mathrm{Vect}(h_1, ..., h_k)$ donc $h_k \in \mathrm{Vect}(f_1, ..., f_k)$.
Ainsi, il existe $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$ tels que $h_k = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i$.
De plus, $(h_1, ..., h_k)$ est orthogonale donc $h_k \in \mathrm{Vect}(h_1, ..., h_{k-1})^{\perp} = \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_{k-1})^{\perp} = \mathrm{Vect}(f_1, ..., f_{k-1})^{\perp}$.

Soit $p \in [\![1, k-1]\!]$, on a :

$$0 = <h_k, f_p> = <\sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i, f_p> = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i <f_i, f_p> = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \delta_{i,p} = \lambda_p.$$

Ainsi, $h_k = \lambda_k f_k$.
Enfin, $\|h_k\| = 1$ donc $\|\lambda_k f_k\| = 1$. D'où $|\lambda_k| \|f_k\| = 1$. Or, $\|f_k\| = 1$. Donc $|\lambda_k| = 1$. Ainsi, $\lambda_k = \pm 1$.
Enfin, $<h_k, e_k>> 0$. Donc $<\lambda_k f_k, e_k>> 0$. D'où $\lambda_k <f_k, e_k>> 0$. Or, $<f_k, e_k>> 0$. Donc $\lambda_k > 0$. Ainsi, $\lambda_k = 1$ donc $h_k = f_k$.
Ainsi : $\forall k \in [\![1,n]\!], h_k = f_k$ ce qui prouve l'unicité d'une telle famille. □

➪ **Exemple 10 :** Orthonormaliser la famille $((1,1,1), (1,0,-1), (-1,2,3))$ pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^3$.

➪ **Exemple 11 :** Soit $E = \mathbb{R}_1[X]$ muni du produit scalaire défini par :

$$\forall P, Q \in E, <P, Q> = \int_0^1 t P(t) Q(t)\, dt.$$

Orthonormaliser la base canonique de E.

IV Bases orthonormées d'un espace euclidien

4.1 Existence

Définition 7

Soit E un espace euclidien. On appelle base orthonormée (ou base orthonormale) de E toute base de E qui est une famille orthonormée.

Proposition 10

Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
Toute famille orthonormée de E à n éléments est une base orthonormée de E.

Preuve. Toute famille orthonormée de E est libre. Comme il s'agit d'une famille de $n = \dim E$ vecteurs, alors c'est une base de E. □

Théorème 3

Tout espace euclidien non réduit à $\{0\}$ possède une base orthonormée.

Preuve. Soit E un espace euclidien non réduit à $\{0\}$. Puisque E est de dimension finie et non réduit à $\{0\}$, il existe $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On l'orthonormalise avec le procédé de Gram-Schmidt pour obtenir une famille $(f_1, \ldots, f_n)$ orthonormée. Il s'agit d'une famille orthonormée de E à $n = \dim(E)$ éléments. C'est donc une base orthonormée de E. □

Remarque : Pour construire une base orthonormée, il suffit d'orthonormaliser une base quelconque de E.

4.2 Formules dans une base orthonormée

Proposition 11

Soit $(E, <,>)$ un espace euclidien. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E.

- $\forall x \in E,\ x = \sum_{k=1}^{n} < x, e_k > e_k$.
- Soit $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ et $y = \sum_{k=1}^{n} y_k e_k \in E$. On a alors :

$$< x, y >= \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = \sum_{k=1}^{n} < x, e_k >< y, e_k > \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \sum_{k=1}^{n} < x, e_k >^2$$

En posant $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, on a :

$$< x, y >= X^T Y \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = X^T X$$

en identifiant les matrices de taille 1×1 à leur unique coefficient.

Corollaire 4

Soit E un espace euclidien, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E et $A = (a_{i,j})_{1 \le i, j \le n}$ la matrice de $u \in \mathcal{L}(E)$ en base $\mathcal{B}$. Alors pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $a_{i,j} =< u(e_j), e_i >$.

Preuve. On a : $\forall j \in [\![1, n]\!],\ u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} < u(e_j), e_i > e_i$. □

Corollaire 5

Soit E un espace euclidien, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E, $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ une base orthonormée de E. Posons $P = Pass(\mathcal{B}, \mathcal{C})$. Alors :

$$P^{-1} = P^T.$$

Preuve. Posons $P = (a_{i,j})$. On a : $\forall j \in [\![1, n]\!],\ f_j = \sum_{i=1}^{n} < e_i, f_j > e_i$.
Donc $\forall i, j \in [\![1, n]\!]$, $a_{i,j} =< e_i, f_j >$.
Ainsi, soient $i, j \in [\![1, n]\!]$:

$$(PP^T)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} a_{j,k} = \sum_{k=1}^{n} < e_i, f_k >< e_j, f_k >=< e_i | e_j >= \delta_{i,j}.$$

Donc $PP^T = I_n$. □

4.3 Base incomplète

Théorème 4 : Théorème de la base orthonormée incomplète

Soit $(E, < \cdot, \cdot >)$ un espace vectoriel euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in [\![1, n]\!]$.
Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille orthonormale de E.
Alors, il existe $e_{p+1}, \dots, e_n \in E$ tels que $(e_1, \dots, e_n)$ soit une base orthonormée de E.

Preuve. Comme $(e_1, \dots, e_p)$ une famille orthonormale, alors $(e_1, \dots, e_p)$ est libre. Donc, d'après le théorème de la base incomplète, il existe $g_{p+1}, \dots, g_n \in E$ tels que $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ soit une base de E.
On l'orthonormalise avec le procédé de Gram-Schmidt pour obtenir une famille $(f_1, \dots, f_n)$ qui soit une base orthonormée de E.
Comme $(e_1, \dots, e_p)$ est orthonormée, on peut choisir : $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $f_k = e_k$. Ainsi : $f_{p+1}, \dots, f_n$ conviennent. □

V Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

5.1 Supplémentaire orthogonal

Proposition 12

Soit $(E, <,>)$ un préhilbertien réel.
Si F est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, alors F et $F^\perp$ sont supplémentaires, c'est-à-dire :

$$F \oplus F^\perp = E.$$

Définition 8

Soit $(E, <,>)$ un préhilbertien réel.
Soit F est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie.
Le sous-espace vectoriel $F^\perp$ est appelé le supplémentaire orthogonal de F.

Corollaire 6

Soit $(E, <,>)$ un espace euclidien . Soit F un sous-espace vectoriel de E.

$$\dim(F^\perp) + \dim(F) = \dim(E).$$

Preuve. On a :

$$\dim(E) = \dim(F \oplus F^\perp) = \dim(F) + \dim(F^\perp).$$

□

Proposition 13

Soit $(E, <,>)$ un espace euclidien. Soit F un sous-espace vectoriel de E.

$$F^{\perp\perp} = F.$$

Preuve. On a déjà l'inclusion $F \subset (F^\perp)^\perp$. De plus :

$$\dim(F^{\perp\perp}) = \dim(E) - \dim(F^\perp) = \dim(E) - (\dim(E) - \dim(F)) = \dim(F).$$

Ainsi, on a bien $F = F^{\perp\perp}$. □

Définition 9

Soit $(E, <,>)$ un espace euclidien. Soit F un hyperplan de E. On a $\dim(F^\perp) = 1$. On appelle vecteur normal à F tout vecteur non nul de $F^\perp$.

➪ **Exemple 12 :** $(\star)$
Soit $(E, <,>)$ un espace euclidien. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $\forall x \in E, < x, f(x) >= 0$. Montrer que $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires orthogonaux.

Soit $x \in \ker(f)$, soit $y \in Im(f)$.
Il existe $z \in E$ tel que $y = f(z)$.
Par hypothèse : $< x+z, f(x+z) >= 0$. Or :

$$< x+z, f(x+z) >=< x+z, f(x)+f(z) >=< x, f(x) > + < x, f(z) > + < z, f(x) > + < z, f(z) >=< x, f(z) >=< x, y > .$$

Donc $< x, y >= 0$ ainsi $x \in Im(f)^\perp$ et donc : $\ker(f) \subset Im(f)^\perp$.
De plus, $\dim Im(f)^\perp = \dim E - \dim Im(f) = \dim(\ker(f))$ d'après le théorème du rang.
Donc :

$$\ker(f) = Im(f)^\perp.$$

5.2 Projection orthogonale

Définition 10

Soit E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. On appelle projection orthogonale sur F, la projection sur F parallèlement à $F^\perp$, notée p_F.
Soit $x \in E$. $p_F(x)$ est appelé projeté orthogonal de x sur F.

Remarque :

- Comme F et $F^\perp$ sont supplémentaire, la projection sur F parallèlement à $F^\perp$ est bien définie. Et on a :
- $p_F \circ p_F = p_F$,
- $\ker p_F = F^\perp$ et $\operatorname{Im} p_F = F$,
- $\forall x \in F,\ p_F(x) = x$,
- $\forall x \in F^\perp,\ p_F(x) = 0$.

Proposition 14

Soit E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. Soit $(e_1,...,e_p)$ une base orthonormée de F.

$$\forall x \in E,\ p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} < x, e_i > e_i$$

Preuve. Soit $x \in E$, il existe un unique $(y,z) \in F \times F^\perp$ tel que $x = y+z$. On a alors $p_F(x) = p_F(y)+p_F(z) = y$. Or, $y \in F$ donc il existe $\lambda_1,...,\lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que $y = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$.
On a alors, soit $k \in [\![1,p]\!]$:

$$< x, e_k >=< y+z, e_k >=< \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i, e_k > + < z, e_k >= \sum_{i=1}^{p} \lambda_i < e_i, e_k > +0 = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \delta_{i,k} = \lambda_k.$$

Ainsi, $p_F(x) = y = \sum_{i=1}^{p} < x, e_i > e_i$. □

Théorème 5 : Inégalité de Bessel

Soit E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E.
Soit $x \in E$ et notons $p_F(x)$ son projeté orthogonal sur F. Alors :

$$\|p_F(x)\| \leq \|x\|$$

Méthode 1

Pour déterminer l'expression du projeté orthogonal d'un vecteur x de E sur un sous espace vectoriel F de E, on peut utiliser une des deux méthodes suivantes :

- Soit on détermine une base orthonormée de F et on utilise la formule de la proposition précédente.
- Si $(e_1,...,e_p)$ est une famille génératrice de F. Pour déterminer $y = p_F(x)$, il suffit de se donner $y = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$ et, comme $x - y \in F^\perp$, de résoudre le système linéaire d'inconnues $\lambda_1,...,\lambda_p \in \mathbb{R}$:

$$\forall k \in [\![1,p]\!],\ 0 =< x-y, e_k >=< x - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i, e_k > .$$

Cela évite de déterminer une base orthonormée de F.

➪ **Exemple 13 :** Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel et soit $F = \{(x,y,z) \in E,\ x+y-z = 0\}$.
Déterminer l'expression de la projection orthogonale sur F.

5.3 Distances

Définition 11

Soit F un sous-espace vectoriel de E et $a \in E$. On appelle distance de a à F la quantité :

$$d(a,F) = \inf_{x \in F} \|a - x\|$$

Remarque :

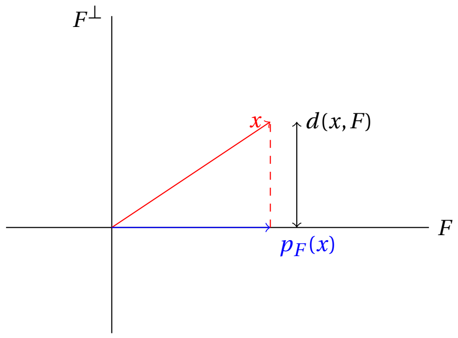
- L'existence de $d(a,F)$ vient du fait que $\{\|a-x\|, x \in F\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ (car F est non vide car espace vectoriel) et minorée par 0 donc la borne inférieure existe.
- Si $a \in F$, alors $d(a,F) = 0$.

Proposition 15

Soient E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace de E de dimension finie. Soit $a \in E$.
Il existe un unique élément $x_0 \in F$ tel que : $\|a - x_0\| = \inf_{x \in F} \|a - x\| = d(a,F)$. Il s'agit donc d'un minimum.
Cet unique vecteur $x_0 \in F$ est $p_F(a)$ le projeté orthogonal de a sur F. En particulier :

$$d(a,F) = \|a - p_F(a)\|.$$

Remarque : Si E est euclidien alors : $d(a,F) = \|p_{F^\perp}(a)\|$.



Preuve. Soit $y \in F$.

On a $x - y = x - p_F(x) + p_F(x) - y$. Comme $p_F(x)$ est la projection orthogonal de x sur F, on a $x - p_F(x) \in F^\perp$ et $p_F(x) - y \in F$. Ainsi $< x - p_F(x), p_F(x) - y >= 0$. Ainsi, par le théorème de Pythagore :

$$\|x-y\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x) - y\|^2.$$

Ainsi $\|x-y\|^2 \geq \|x - p_F(x)\|^2$ puis par croissance $\sqrt{\ }$:

$$\|x - y\| \geq \|x - p_F(x)\|.$$

Donc :

$$\|x - p_F(x)\| = \inf_{y \in F} \|x - y\| = d(x,F).$$

De plus, on a :

$$\|x-y\|^2 = d(x,F) \iff \|x-y\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 \iff \|p_F(x) - y\|^2 = 0 \iff y = p_F(x).$$

□

Remarque : Cette proposition permet de minimiser des quantités, si on peut les interpréter comme la distance entre deux vecteurs pour une certaine norme.

➪ **Exemple 14 :** Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel. Soient $x = (1,2,3)$ et $F = \{(x,y,z) \in E,\ x + 2y - z = 0\}$. Calculer $d(x,F)$.

➪ **Exemple 15 :** $(\star)$ Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, soient $a_0, \dots, a_n$ des réels distincts. On pose :

$$\forall P, Q \in E,\ (P|Q) = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k).$$

1. Montrer que $(.|.)$ est un produit scalaire sur E.
2. Déterminer une base orthonormée de E.
3. Soit $F = \{P \in E, \sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 0\}$. Déterminer $F^\perp$.
4. Soit $Q \in E$, calculer $d(Q,F)$.

1. - *Soient* $P, Q \in E$*, on a :*
$$(Q|P) = \sum_{k=0}^{n} Q(a_k)P(a_k) = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k) = (P|Q).$$
Donc $(.|.)$ *est symétrique.*
   - *Soient* $P, Q_1, Q_2 \in E$*,* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$*, on a :*
$$(P|\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2) = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)(\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2)(a_k) = \lambda_1 \sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q_1(a_k) + \lambda_2 \sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q_2(a_k) = \lambda_1(P|Q_1) + \lambda_2(P|Q_2).$$
Donc $(.|.)$ *est linéaire à droite et, par symétrie,* $(.|.)$ *est bilinéaire.*
   - *Soit* $P \in E$*.*
On a $(P|P) = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)^2 \geq 0$*.*
De plus, si $(P|P) = 0$*, alors* $\sum_{k=0}^{n} P(a_k)^2 = 0$*. Or :* $\forall k \in [\![0, n]\!], P(a_k)^2 \geq 0$ *donc* $\forall k \in [\![0, n]\!]$*,* $P(a_k) = 0$*.*
Ainsi P *admet au moins* $n+1$ *racines distinctes. Or,* $\deg(P) \leq n$ *donc* $P = 0$*.*
Ainsi $(.|.)$ *est défini-positif.*
   - *Donc* $(.|.)$ *est un produit scalaire sur* E*.*
2. *Posons :*
$$\forall j \in [\![0, n]\!], L_j = \prod_{i \in [\![0,n]\!] \setminus \{j\}} \frac{X - a_i}{a_j - a_i},$$
la famille des polynômes d'interpolation de Lagrange.
On a : $\forall i, j \in [\![0, n]\!]$*,* $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$*.*
Donc :
$$\forall i, j \in [\![0, n]\!], (L_i, L_j) = \sum_{k=0}^{n} L_i(a_k)L_j(a_k) = \sum_{k=0}^{n} \delta_{i,k}\delta_{j,k} = \delta_{i,j}.$$
Donc la famille $(L_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ *est orthonormée. Comme il s'agit d'une famille de* $n+1 = \dim E$ *vecteurs alors la famille* $(L_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ *est une base orthonormée de* E*.*
3. *On a :*
$$F = \{P \in E, \sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 0\} = \{P \in E, (P, 1) = 0\} = (Vect(1))^{\perp}.$$
Donc :
$$F^{\perp} = (Vect(1))^{\perp\perp} = Vect(1) = \mathbb{R}_0[X].$$
4. *On a :* $d(Q, F) = \|p_{F^{\perp}}(Q)\|$*.*
Comme $\|1\| = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} 1^2} = \sqrt{n+1}$*, alors* $\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ *est une base orthonormée de* $F^{\perp}$ *donc :*
$$p_{F^{\perp}}(Q) = (Q|\frac{1}{\sqrt{n+1}})\frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} Q(a_k).$$
Donc :
$$d(Q, F) = \frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=0}^{n} Q(a_k)\right| \|1\| = \frac{1}{\sqrt{n+1}}\left|\sum_{k=0}^{n} Q(a_k)\right|.$$