

# Chapitre 24 : Déterminants

Dans tout le chapitre  $n$  désignera un entier naturel non nul,  $E$  désignera un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel **de dimension**  $n$  et  $\mathbb{K}$  désignera  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

## I Déterminant d'une matrice carrée

### 1.1 Définition

#### Définition 1

Il existe une unique application  $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $M \mapsto \det(M)$  vérifiant les propriétés suivantes :

1.  $\det$  est linéaire par rapport à chaque colonne de sa variable : soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice de colonnes  $C_1, \dots, C_n$ , alors, pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , l'application :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{n,1} &\rightarrow \mathbb{K} \\ X &\mapsto \det(C_1 | \dots | C_{j-1} | X | C_{j+1} | \dots | C_n) \end{aligned}$$

est linéaire,

2.  $\det$  est alternée : soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice de colonnes  $C_1, \dots, C_n$ , s'il existe  $i \neq j$  tel que  $C_i = C_j$ , alors  $\det(A) = 0$ ,
3.  $\det(I_n) = 1$ .

#### Corollaire 1

L'application  $\det$  est antisymétrique : soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice de colonnes  $C_1, \dots, C_n$ , soient  $i \neq j$ , soit  $B$  la matrice obtenue à partir de  $A$  en échangeant les colonnes  $i$  et  $j$ , on a :  $\det(B) = -\det(A)$ .

**Notation :** Soit  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

On note :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

**Remarque :** En pratique :

#### Corollaire 2

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ , on a :

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A).$$

**Remarque :** Le déterminant n'est pas linéaire, on ne "sort" pas le facteur  $\lambda$  mais on le sort de chaque colonne. En général  $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$ .

## 1.2 Propriétés sur les colonnes

### Proposition 1

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice carrée.

1. Si une colonne de  $A$  est nulle, alors  $\det(A) = 0$ .
2. Si deux colonnes de  $A$  sont égales, alors  $\det(A) = 0$ .

### Proposition 2

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Soit  $B$  la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  obtenue à partir de  $A$  en faisant :

- $C_i \leftarrow \lambda C_i$  avec  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}^*$ . Alors :

$$\det(B) = \lambda \det(A),$$

- $C_i \leftrightarrow C_j$  avec  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$  et  $i \neq j$ . Alors :

$$\det(B) = -\det(A),$$

- $C_j \leftarrow C_j + \mu C_i$ , avec  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,  $i \neq j$  et  $\mu \in \mathbb{K}$ . Alors :

$$\det(B) = \det(A).$$

## 1.3 Propriétés sur les lignes

### Proposition 3

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On a :

$$\det(A^T) = \det(A).$$

### Corollaire 3

Le déterminant vérifie les mêmes propriétés vis à vis des lignes que des colonnes :

- $\det$  est linéaire par rapport à chacune des lignes de sa variable,
- $\det$  est antisymétrique par rapport aux lignes de sa variable,
- si  $A$  a une ligne nulle alors  $\det(A) = 0$ ,
- si  $A$  a deux lignes égales alors  $\det(A) = 0$ .

### Proposition 4

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Soit  $B$  la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  obtenue à partir de  $A$  en faisant :

- $L_i \leftarrow \lambda L_i$  avec  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}^*$ . Alors :

$$\det(B) = \lambda \det(A),$$

- $L_i \leftrightarrow L_j$  avec  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$  et  $i \neq j$ . Alors :

$$\det(B) = -\det(A),$$

- $L_j \leftarrow L_j + \mu L_i$ , avec  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,  $i \neq j$  et  $\mu \in \mathbb{K}$ . Alors :

$$\det(B) = \det(A).$$

## 1.4 Cas particuliers

### Proposition 5 : Déterminant d'une matrice diagonale

Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ . On a :

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^n \lambda_k.$$

### Proposition 6 : Déterminant d'une matrice triangulaire

Soit  $T = (t_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) de diagonale  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . Alors :

$$\det(T) = \prod_{k=1}^n \lambda_k.$$

Autrement dit :

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & * & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^n \lambda_k \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & 0 & \\ & * & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^n \lambda_k$$

### Proposition 7 : Déterminant d'une matrice de taille 2

Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ . On a :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

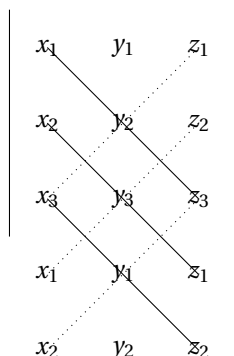
### Proposition 8 : Déterminant d'une matrice de taille 3 (Règle de Sarrus)

Soit  $A = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ . On a :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1 y_2 z_3 + x_3 y_1 z_2 + x_2 y_3 z_1 - x_3 y_2 z_1 - x_1 y_3 z_2 - x_2 y_1 z_3.$$

#### Remarque :

- La formule en dimension 3 se retrouve par la **règle de Sarrus** :



- On a recopié sous le déterminant, les deux premières lignes de la matrice.
- On fait le produit des termes de chaque diagonale (représentée par un trait plein) en attribuant à chaque terme un signe +.
- On fait le produit des termes de chaque anti-diagonale (représentée par un trait en pointillés) en attribuant à chaque terme un signe -.
- La somme de ces termes donne le déterminant de la matrice.

- La règle de Sarrus n'est valable que pour les matrices de taille 3, il ne faut surtout pas la généraliser!

⇔ **Exemple 1** : Calculer  $d_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ , et  $d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ .

## 1.5 Propriétés du déterminant d'une matrice

### Proposition 9

Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on a :

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B).$$

### Corollaire 4

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , soit  $p \in \mathbb{N}$ . On a :

$$\det(A^p) = \det(A)^p.$$

⇔ **Exemple 5** : Soit  $n$  impair et soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $A^2 - A + I_n = 0$ . Déterminer  $A^3$  et en déduire  $\det(A)$ .

### Proposition 10

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Alors :

$$A \in GL_n(\mathbb{K}) \iff \det(A) \neq 0.$$

De plus, dans ce cas  $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ .

### Corollaire 5

Soient  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $P \in GL_n(\mathbb{K})$ . On a :

$$\det(P^{-1}AP) = \det(A)$$

## 1.6 Développement par rapport à une ligne ou par rapport à une colonne

### Proposition 11

Soit  $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Pour tout  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on pose  $A_{i,j}$  la matrice carrée d'ordre  $n - 1$  obtenue en supprimant dans  $M$  la ligne  $i$  et la colonne  $j$ . On peut calculer le déterminant de  $M$  :

- en développant suivant la  $j$ -ème colonne :

$$\det(M) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} m_{i,j} \det(A_{i,j}).$$

- en développant suivant la  $i$ -ème ligne :

$$\det(M) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} m_{i,j} \det(A_{i,j}).$$

**Remarque :** Cette formule permet d'exprimer un déterminant de taille  $n$  en fonction de  $n$  déterminants de taille  $n - 1$ . Elle a donc deux applications :

- obtenir une formule de récurrence pour calculer un déterminant de taille  $n$ ,
- calculer un déterminant de petite taille en appliquant la formule jusqu'à se ramener à un déterminant de taille 3 que l'on calcule grâce à la règle de Sarrus.
- Plus il y a de termes  $m_{i,j}$  nuls, moins il y a de termes à calculer dans la somme. On préfère donc de développer par rapport à une ligne ou une colonne contenant le plus de zéros possible. Sinon, on fait d'abord des opérations élémentaires afin de faire apparaître des zéros puis on utilise le développement.
- En pratique, on applique cette formule en rayant des lignes et des colonnes.

Soit  $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$  On va calculer  $D$  en effectuant un développement par rapport à la première colonne.

- Le terme  $(-1)^{i+j}$  correspond à une alternance de signe "en damier" :

$$D = \begin{vmatrix} \boxed{1} & 2 & \boxed{0} & -1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & \boxed{1} \\ \boxed{1} & 0 & \boxed{2} & 1 \\ 1 & \boxed{1} & 1 & \boxed{0} \end{vmatrix}.$$

Les cases grises correspondent à un signe + (la première case a un signe +) et les cases blanches à un signe -.

⇨ **Exemple 6 :** Soit  $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ . Calculer  $D$  en effectuant un développement par rapport à la deuxième ligne.

⇨ **Exemple 7 :** Soit  $\theta \in [0, \pi]$ , soit, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $d_n$  le déterminant de taille  $n$  :

$$d_n = \begin{vmatrix} 2\cos(\theta) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2\cos(\theta) & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2\cos(\theta) \end{vmatrix}$$

1. Exprimer  $d_{n+2}$  en fonction de  $d_{n+1}$  et  $d_n$ .
2. En déduire  $d_n$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

⇨ **Exemple 8 :** Soient  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ . Montrer que :

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Ce déterminant est appelé déterminant de Vandermonde.

## II Déterminant d'un endomorphisme

### 2.1 Définition

#### Proposition 12

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ . Alors  $\det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u))$  ne dépend pas du choix de la base  $\mathcal{B}$ .

#### Définition 2

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On appelle déterminant de  $u$  et on note  $\det(u)$  le nombre :

$$\det(u) = \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)),$$

où  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$ .

### 2.2 Propriétés

#### Proposition 13

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ , soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

- $\det(\text{Id}_E) = 1$ ,
- $\det(\lambda f) = \lambda^n \det f$ , où  $n = \dim E$ .

**Remarque :** On a  $\det(\lambda \text{Id}_E) = \lambda^n$  et donc  $\det(-\text{Id}_E) = (-1)^n$ .

#### Proposition 14

Soient  $f, g \in \mathcal{L}(E)$ .

$$\det(f \circ g) = \det(f) \cdot \det(g).$$

#### Proposition 15

Soient  $f \in \mathcal{L}(E)$ .

$$f \in GL(E) \iff \det(f) \neq 0.$$

De plus, dans ce cas :  $\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)}$ .

⇔ **Exemple 3 :** Soit  $a \in \mathbb{R}$ , soit  $u: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & (X^2 + 1)P'' - 3XP' + aP. \end{array}$

Pour quelles valeurs de  $a$ ,  $u$  est-elle bijective?

⇔ **Exemple 4 :** Soit  $u: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & P(X+1) - P(X). \end{array}$

Calculer  $\det(u)$ .

### III Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

#### 3.1 Définition

##### Définition 3

Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ , soient  $(x_1, \dots, x_n)$  une famille de  $n$  vecteurs de  $E$ .

On appelle déterminant de la famille  $(x_1, \dots, x_n)$  dans la base  $\mathcal{B}$  et on note  $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$  le nombre :

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)).$$

#### 3.2 Propriétés

Le déterminant d'une famille de vecteurs dans une base étant le déterminant d'une matrice, on peut utiliser tous les résultats vus sur le déterminant d'une matrice.

##### Proposition 16

Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ , soit  $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ .  $(x_1, \dots, x_n)$  est une base de  $E$  ssi :

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \neq 0.$$

⇔ **Exemple 2 :** Soit  $t \in \mathbb{R}$ . On pose  $x_1 = (t, 3, -1)$ ,  $x_2 = (1, -1, t)$  et  $x_3 = (1, t, -1)$ .  
Pour quelles valeurs de  $t$ ,  $(x_1, x_2, x_3)$  forme une base de  $\mathbb{R}^3$ ?

##### Proposition 17

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ .

Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . On a :

$$\det(f) = \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n)).$$

##### Proposition 18

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , soient  $C_1, \dots, C_n$  les colonnes de  $A$ . Soit  $\mathcal{B}$  la base canonique de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ . On a :

$$\det(A) = \det_{\mathcal{B}}(C_1, \dots, C_n).$$