

Chapitre 20 : Matrices et applications linéaires

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie.

I Matrice d'une application linéaire dans des bases

1.1 Matrice d'une famille de vecteurs

Définition 1 : Matrice d'un vecteur

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

Soit $x \in E$. Il existe un unique n -uplet $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$.

On appelle matrice du vecteur x dans la base $\mathcal{B}$ la matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ notée $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ dont les coefficients sont les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$. On note

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

Définition 2 : Matrice d'une famille de vecteurs

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n .

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

Soit $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$, une famille de vecteurs de E .

Soit $j \in [1, p]$, soient $(m_{1,j}, \dots, m_{n,j})$ les coordonnées de u_j dans $\mathcal{B}$, c'est-à-dire : $u_j = \sum_{i=1}^n m_{i,j} e_i$.

On appelle matrice de la famille $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$ et on note $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ la matrice :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = (m_{i,j})_{i \in [1,n], j \in [1,p]} = \begin{pmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,j} & \dots & m_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{i,1} & \dots & m_{i,j} & \dots & m_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & \dots & m_{n,j} & \dots & m_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}).$$

⇔ Exemple 1 :

1. Soit $E = \mathbb{K}^3$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ sa base canonique. Soit $x_1 = (1, 2, 3)$, $x_2 = (2, 0, 1)$ vecteurs de E et $\mathcal{F} = (x_1, x_2)$. Calculer $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$.
2. Soit $E = \mathbb{R}^2$. Soit $e_1 = (1, 1)$, $e_2 = (2, -1)$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$. Soient $x_1 = (3, 0)$, $x_2 = (1, 1)$, $x_3 = (7, 1)$ et $\mathcal{F} = (x_1, x_2, x_3)$. Calculer $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$.
3. Posons $E = \mathbb{R}_2[X]$ et notons $\mathcal{B}$ la base canonique de E . Soit $\mathcal{F} = (X + 1, 3X - 2, X^2 + X)$. Calculer $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$.

1.2 Matrice d'une application linéaire

Définition 3

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finies.

Soit $p = \dim E$ et $n = \dim F$.

Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F .

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

Soit $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, soient $(m_{1,j}, \dots, m_{n,j})$ les coordonnées de $u(e_j)$ dans $\mathcal{C}$, c'est-à-dire : $u(e_j) = \sum_{i=1}^n m_{i,j} f_i$.

On appelle matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, et on note $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ définie par :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u) = (m_{i,j})_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket, j \in \llbracket 1, p \rrbracket} = \begin{pmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,j} & \dots & m_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{i,1} & \dots & m_{i,j} & \dots & m_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & \dots & m_{n,j} & \dots & m_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

Dans le cas où $E = F$ et $\mathcal{B} = \mathcal{C}$, on appelle matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ et on note $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ la matrice :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(u) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Remarque : $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u) = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(u(\mathcal{B}))$.

⇨ **Exemple 2 :** On admet que toutes les applications de cet exemple sont linéaires et on considèrera que $\mathcal{B}$ est la base canonique de l'espace de départ et $\mathcal{C}$ est la base canonique de l'espace d'arrivée. Déterminer $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)$ pour :

1. $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y, z) \mapsto (x - y, y - z).$
2. $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y, z) \mapsto x - y + 4z.$
3. $u: \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$
 $P \mapsto P - XP'.$
4. $u: \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $P \mapsto (P(-1), P(0), P(1)).$
5. $u: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$
 $z \mapsto e^{i\theta} z.$ avec $\mathbb{C}$ vu comme un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel (rotation de centre l'origine et d'angle θ).

⇨ **Exemple 3 :**

Soit E un espace vectoriel ayant pour base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Reconnaitre l'application linéaire f telle que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 1

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{Id}_E) = I_n$$

1.3 Matrices et applications linéaires

Proposition 2

Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces de dimensions finies respectivement égales à p et n , munis respectivement des bases $\mathcal{B}, \mathcal{C}$.

Alors l'application : $\Phi: \mathcal{L}(E, F) \rightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
 $u \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)$ est un isomorphisme.

En particulier :

$$\forall u, v \in \mathcal{L}(E, F), (u = v \iff \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(v)).$$

Corollaire 1

Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions respectives p et n . Alors, $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension finie et

$$\dim(\mathcal{L}(E, F)) = np = \dim(E)\dim(F)$$
1.4 Matrices et coordonnées**Proposition 3**

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finies respectivement égales à p et n .

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E , soit $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F .

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, soit $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)$.

Soit $x \in E$ de coordonnées $(x_1, \dots, x_p)$ dans $\mathcal{B}$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, c'est-à-dire $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$.

Soient $(y_1, \dots, y_n)$ les coordonnées de $u(x)$ dans $\mathcal{C}$.

Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, c'est-à-dire $Y = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(u(x))$.

Alors :

$$Y = AX.$$

⇨ **Exemple 4 :** Soit $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{C}$) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ (resp. $\mathbb{R}^2$). Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u) = A$.

1.5 Opérations sur les matrices de deux applications linéaires**Proposition 4 : Matrice d'une combinaison linéaire**

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finies munis respectivement des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. Soient $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, alors :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\lambda u + \mu v) = \lambda \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u) + \mu \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(v).$$

Proposition 5 : Matrice d'une composée

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finies munis respectivement des bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''$. Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}''}(v \circ u) = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}''}(v) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u).$$

Corollaire 2

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie muni d'une base $\mathcal{B}$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u^n) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)^n,$$

où $u^n = u \circ \dots \circ u$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)^n = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \dots \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.

Proposition 6

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de même dimension n munis respectivement des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.
Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$

u est un isomorphisme si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)$ est inversible.

On a alors $(\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u))^{-1} = \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(u^{-1})$.

Corollaire 3

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n muni d'une base $\mathcal{B}$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

$$u \in GL(E) \iff \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in GL_n(\mathbb{K}).$$

On a alors $(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u))^{-1} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u^{-1})$.

⇨ **Exemple 5 :** Soit $f : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X], P \mapsto P(X+1) - P'$.

1. Ecrire la matrice A de f dans la base canonique.
2. La matrice A de f est-elle inversible? Si oui, calculer son inverse.
3. Que peut-on en déduire pour f ?

II Application linéaire canoniquement associée à une matrice, rang d'une matrice

2.1 Application linéaire canoniquement associée à une matrice

Définition 4

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^p$, soit $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

L'unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ telle que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u) = A$$

est appelée application linéaire canoniquement associée à A .

⇨ **Exemple 6 :** Posons :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer l'application linéaire canoniquement associée à A .

Remarque : Si on identifie $\mathbb{K}^n$ avec $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^p$ avec $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ (convention usuelle), l'application canoniquement associée à A est :

$$\begin{array}{ccc} u : \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \rightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \mapsto & AX \end{array}$$

2.2 Noyau et image d'une matrice

Définition 5

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- On appelle noyau de A et on note $\text{Ker } A$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ défini par :

$$\text{Ker } A = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}), AX = 0\}$$

- On appelle image de A et on note $\text{Im } A$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ défini par :

$$\begin{aligned} \text{Im } A &= \{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \exists X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}), Y = AX\} \\ &= \{AX, X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})\} \end{aligned}$$

Remarque : En notant u l'application canoniquement associée à A . On a :

$$(x_1, \dots, x_p) \in \text{Ker } u \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \text{Ker } A,$$

$$(y_1, \dots, y_n) \in \text{Im } u \iff \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \text{Im } A.$$

⇔ **Exemple 7 :** Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer $\text{Ker}(A)$ et $\text{Im}(A)$.
2. Soit u_1 l'application linéaire canoniquement associée à A . En déduire $\text{Ker}(u_1)$ et $\text{Im}(u_1)$.
3. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, soit $u_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_2) = A$. En déduire $\text{Ker}(u_2)$ et $\text{Im}(u_2)$.

Proposition 7

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- $\text{Ker } A$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.
- $\text{Im } A$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Proposition 8

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

En notant $C_1, \dots, C_p$ les colonnes de A , on a :

$$\text{Im } A = \text{Vect}(C_1, \dots, C_p)$$

Remarque :

- Les colonnes de A engendrent l'image.
- Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, soit $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$:

$$\begin{aligned} AX = 0 &\iff \begin{cases} \sum_{j=1}^p a_{1,j} x_j = 0 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^p a_{n,j} x_j = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,p}x_p = 0 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \dots + a_{n,p}x_p = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, les lignes de A donnent un système d'équations du noyau.

2.3 Rang d'une matrice

Définition 6

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle rang de A le rang de la famille $(C_1, \dots, C_p)$ des colonnes de A . On note :

$$\text{rg } A = \text{rg}(C_1, \dots, C_p) = \dim(\text{Vect}(C_1, \dots, C_p)) = \dim(\text{Im } A).$$

Proposition 9

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espace vectoriels de dimensions finies.

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ des bases respectives de E et F .

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Notons $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)$. On a :

$$\text{rg } A = \text{rg}(u).$$

Remarque : On a relié le rang d'une famille de vecteurs, le rang d'une application linéaire et le rang d'une matrice.

Corollaire 4

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, le rang d'une matrice A est égal au rang de l'application u canoniquement associée à A .

Proposition 10

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

$$\text{rg}(A) \leq \min(n, p).$$

Proposition 11 : Théorème du rang

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

$$p = \dim(\text{Ker } A) + \text{rg}(A).$$

2.4 Matrices inversibles

Proposition 12

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a les équivalences suivantes :

$$A \in GL_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \text{Ker}(A) = \{0\} \Leftrightarrow \text{Im}(A) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \text{rg}(A) = n.$$

Remarque : Soit $T \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$, $\text{rg}(T) = n$ ssi tous les coefficients diagonaux de T sont non nuls. On retrouve ainsi la condition d'inversibilité d'une matrice triangulaire.

Proposition 13

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- S'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $BA = I_n$ alors $A \in GL_n(\mathbb{K})$ et $A^{-1} = B$.
- S'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $AB = I_n$ alors $A \in GL_n(\mathbb{K})$ et $A^{-1} = B$.

2.5 Opérations élémentaires

Proposition 14

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- Les opérations élémentaires sur les colonnes de A préservent $\text{Im } A$
- Les opérations élémentaires sur les lignes de A préservent $\text{Ker } A$

Proposition 15

Les opérations élémentaires préservent le rang.

⇨ **Exemple 8 :** Soit $a \in \mathbb{R}$, soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & 1 & a & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer le rang de A .

Proposition 16 : Rang de la transposée

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^T)$.

Remarque : Ce résultat est admis.

Corollaire 5

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, notons $L_1, \dots, L_n$ les lignes de A .

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(L_1, \dots, L_n).$$

III Changements de bases

3.1 Matrice de passage

Définition 7

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n .

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E .

On appelle matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et on note $Pass(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ la matrice :

$$Pass(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Proposition 17

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n . Soit $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''$ des bases de E .

- $Pass(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(Id_E)$.
- $Pass(\mathcal{B}, \mathcal{B}'') = Pass(\mathcal{B}, \mathcal{B}') Pass(\mathcal{B}', \mathcal{B}'')$.
- $Pass(\mathcal{B}, \mathcal{B}) = I_n$.
- $Pass(\mathcal{B}, \mathcal{B}') \in GL_n(\mathbb{K})$ et $(Pass(\mathcal{B}, \mathcal{B}'))^{-1} = Pass(\mathcal{B}', \mathcal{B})$.

3.2 Formules de changement de base

Proposition 18 : Effet d'un changement de base sur la matrice d'un vecteur

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.

Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_p)$ deux bases de E .

Soit $x \in E$ de coordonnées $(x_1, \dots, x_p)$ dans $\mathcal{B}$ et de coordonnées $(x'_1, \dots, x'_p)$ dans $\mathcal{B}'$.

Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

Alors :

$$X = Pass(\mathcal{B}, \mathcal{B}') X' \text{ et } X' = Pass(\mathcal{B}', \mathcal{B}) X.$$

⇨ **Exemple 9 :** Notons $\mathcal{B} = ((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$ la base canonique de $\mathbb{K}^4$.

1. Montrer que la famille $\mathcal{B}' = ((1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1))$ est une base de $\mathbb{K}^4$.
2. Posons $x = (2, -1, 3, 4)$. Déterminer les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}'$.

Proposition 19 : Effet d'un changement de base sur la matrice d'une application linéaire

Soient E et F des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies.

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E , $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases de F .

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

On a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'}(u) = Pass(\mathcal{C}', \mathcal{C}) \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u) Pass(\mathcal{B}, \mathcal{B}').$$

Corollaire 6 : Effet d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E . Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

On a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = Pass(\mathcal{B}', \mathcal{B}) \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) Pass(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = Pass(\mathcal{B}, \mathcal{B}')^{-1} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) Pass(\mathcal{B}, \mathcal{B}').$$

⇨ **Exemple 10 :** On pose $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 1, 0)$, $v_3 = (1, 2, 3)$, $F = \text{Vect}(v_1, v_2)$, $G = \text{Vect}(v_3)$. On pose $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$. $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Soit s la symétrie par rapport à F parallèlement à G . Déterminer $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(s)$.

En déduire la matrice de s dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

⇔ **Exemple 11 :** On note $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}_3$ et $\mathcal{B} = ((1, 3, 1), (1, 0, -2), (0, 1, -1))$.
On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\begin{aligned} u: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (10x - y - z, -6x + 9y - 3z, -2x - y + 11z) \end{aligned}$$

1. Vérifier que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(u)$. On note $A = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(u)$.
3. Déterminer $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. On note $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.
4. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

3.3 Matrices semblables

Définition 8

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A et B sont semblables ssi il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $B = P^{-1}AP$.

Remarque :

- Deux matrices semblables ont même rang.
- Si deux matrices sont semblables, leurs puissances le sont aussi.

Proposition 20

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E . $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$ sont semblables.

⇔ **Exemple 12 :** Soit A la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Montrer que A est semblable à une matrice diagonale.

⇔ **Exemple 13 :** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = 0_n$. Montrer que A est semblable à :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & 0 & \\ & & & & & 0 \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

IV Systèmes linéaires

Soit

$$(S) \quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + \dots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \dots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

Notons

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

la matrice associée au système (S).

Proposition 21

Soient $x_1, \dots, x_p \in \mathbb{K}$, notons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Alors $(x_1, \dots, x_p)$ est solution du système homogène associé à (S) ssi $X \in \ker A$.

Définition 9

Soit (S_0) un système homogène, notons A la matrice associée. On appelle rang de (S_0) et on note $\text{rg}(S_0)$ le rang de sa matrice :

$$\text{rg}(S_0) = \text{rg}(A).$$

Proposition 22

Soit (S_0) un système homogène.
Notons E_0 l'espace des solutions de (S_0) .
On a :

$$\dim E_0 = p - \text{rg}(S_0)$$

Proposition 23

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
Le système $AX = B$ est compatible ssi $B \in \text{Im } A$.

Proposition 24

Soient $A \in GL_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Le système $AX = B$ possède une unique solution. Dans ce cas, le système est dit de Cramer.