# Chapitre 17 : Espaces vectoriels

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

## I Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

### 1.1 Structure de $\mathbb{K}$ espace vectoriel

**Définition 1**

Soit $E$ un ensemble muni :

- d'une addition notée $+$, c'est à dire une application :

$$\begin{array}{ccc} E\times E & \to & E \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{array}$$

- d'une multiplication externe notée . , aussi appelée multiplication par un scalaire, c'est à dire une application :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}\times E & \to & E \\ (\lambda,y) & \mapsto & \lambda.y \end{array}$$

On dit que $(E,+,.)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ssi :

- L'addition de $E$ possède les propriétés suivantes :
  - * $\forall (x,y,z)\in E^3,\ (x+y)+z = x+(y+z)$ (associativité)
    On pourra ainsi écrire $x+y+z$.
  - * $\exists e\in E, \forall x\in E,\ x+e = e+x = x$.
    Un tel $e$ est unique et on le note généralement $0_E$.
  - * $\forall x\in E, \exists x'\in E,\ x+x' = x'+x = 0_E$.
    Un tel $x'$ est unique. On l'appelle opposé de $x$ et on le note $-x$. On a ainsi : $x+(-x) = (-x)+x = 0_E$.
  - * $\forall (x,y)\in E^2,\ x+y = y+x$ (commutativité).
- La multiplication par un scalaire vérifie :
  - * $\forall (\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2, \forall x\in E,\ (\lambda+\mu).x = \lambda.x+\mu.x$.
  - * $\forall \lambda\in\mathbb{K},\ \forall (x,y)\in E^2,\ \lambda.(x+y) = \lambda.x+\lambda.y$.
  - * $\forall (\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2, \forall x\in E,\ \lambda.(\mu.x) = (\lambda\mu).x$.
  - * $\forall x\in E,\ 1.x = x$.

Les éléments de $E$ sont appelés les vecteurs et les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés les scalaires.

**Proposition 1**

- Soit $(\lambda,x)\in\mathbb{K}\times E$, on a : $\lambda.x = 0_E \iff \lambda = 0$ ou $x = 0_E$.
- Soit $(\lambda,x)\in\mathbb{K}\times E$, on a : $(-\lambda).x = \lambda.(-x) = -(\lambda.x)$.

**Proposition 2**

Soient $n,p\in\mathbb{N}^*$.

- $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel,
- $\mathbb{K}[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel,
- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

**Remarque :**

- $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
- $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et mais n'est pas un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

**Proposition 3**

Soit $A$ un ensemble non vide, soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. L'ensemble $\mathcal{F}(A,E)$ des fonctions de $A$ dans $E$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

**Corollaire 1**

Soit $A$ une partie non vide de $\mathbb{R}$.

- $\mathcal{F}(A,\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel,
- $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

**Définition 2**

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $(x_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ une famille de vecteurs de $E$. On appelle combinaison linéaire de la famille $(x_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ tout vecteur de la forme :

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k,$$

avec $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{K}$.

## 1.2 Sous-espaces vectoriels

**Définition 3**

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit que $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de $E$ ssi

- $F \neq \emptyset$
- $\forall x, y \in F,\ x + y \in F$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in F,\ \lambda.x \in F$

**Proposition 4**

Soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F$ un sous-espace vectoriel de $E$. Alors $(F, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.

**Proposition 5**

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Un ensemble $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de $E$ si et seulement si

- $F \neq \emptyset$
- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \forall x, y \in F,\ \lambda.x + \mu.y \in F$

**Remarque :** Un sous-espace vectoriel est stable par combinaisons linéaires.

**Corollaire 2**

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Si $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$, alors :

$$\forall x_1,\dots,x_n \in F,\ \forall \lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{K},\ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \in F.$$

**Remarque :**

- $E$ et $\{0_E\}$ sont des sous-espaces vectoriels de $E$.
- On a déjà rencontré des sous-espaces vectoriels :
  - $\mathcal{C}^0(I)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$.
  - $\mathcal{C}^n(I)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$.
  - $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.
  - ...

**Proposition 6**

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel tel que $E \neq \{0_E\}$. Soit $x_0 \in E \setminus \{0_E\}$. Posons :

$$F = \{\lambda x_0, \lambda \in \mathbb{K}\}.$$

Alors $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$. On dit que $F$ est une droite vectorielle.

➪ **Exemple 1 :**
Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ?

1. $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x - 2y + z = 0\}$
2. $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x - 2y + z = 1\}$
3. $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ xy + z = 0\}$
4. $E = \{(x, x, x),\ x \in \mathbb{R}\}$
5. $E = \{P \in \mathbb{K}[X],\ P'(2) = 0\}$
6. $E = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ \lim_{+\infty} f = 0\}$

## 1.3 Intersection de sous-espaces vectoriels

**Proposition 7**

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille non vide de sous-espaces vectoriels de $E$. Alors $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

**Définition 4**

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $\mathcal{F} = (x_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ une famille de vecteurs de $E$. L'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de $E$ contenant $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $E$ appelé sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{F}$ et noté $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ ou $\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$.

**Proposition 8**

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $\mathcal{F} = (x_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ une famille de vecteurs de $E$.

- Si $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$ tel que : $\forall k \in [\![1,n]\!],\ x_k \in F$, alors :
$$\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n) \subset F.$$
- $\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$ est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-espace vectoriel contenant la famille $(x_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$.

**Proposition 9**

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et et soit $\mathcal{F} = (x_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ une famille de vecteurs de $E$. Alors $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de $\mathcal{F}$ :
$$\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) = \left\{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}\right\}.$$

**Remarque :**

- Si $u \neq 0_E$, $\mathrm{Vect}(\{u\}) = \{\lambda u,\ \lambda \in \mathbb{K}\}$ donc l'espace vectoriel engendré par le vecteur $u$ est une droite vectorielle.
- On a déjà rencontré des sous-espaces vectoriels engendrés :
  - $\mathbb{K}_n[X] = \mathrm{Vect}(1, X, \ldots, X^n)$
  - L'ensemble $\mathcal{S}_0$ es solutions de $y' + a(x)y = 0$ est $\mathcal{S}_0 = \mathrm{Vect}(f)$ où $f : x \mapsto e^{-A(x)}$.
  - ...

➪ **Exemple 2 :**

1. On pose : $E = \mathbb{R}^3$, $u = (1, 0, -1)$ et $v = (0, 1, -1)$. Déterminer $\mathrm{Vect}(u, v)$.
2. On pose : $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + 2y - z = 0\}$. Ecrire $E$ sous forme d'un sous-espace vectoriel engendré.
3. On pose : $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x + y + z + t = 0 \text{ et } x - y + z - t = 0\}$. Ecrire $E$ sous forme d'un sous-espace vectoriel engendré.

**Proposition 10**

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $\mathcal{F} = (x_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ une famille de vecteurs de $E$. Soit $\mathcal{G} = (x_k)_{k\in I}$ une sous-famille de $\mathcal{F}$, c'est-à-dire telle que : $I \subset [\![1,n]\!]$, alors :
$$\mathrm{Vect}(\mathcal{G}) \subset \mathrm{Vect}(\mathcal{F}).$$

**Proposition 11**

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $\mathcal{F} = (x_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ une famille de vecteurs de $E$.
Si $x \in \mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_n)$, alors $\mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_n,x) = \mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_n)$.

### 1.4 Somme de sous-espaces vectoriels

**Définition 5**

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $F$ et $G$ sont deux sous-espaces vectoriels de $E$, on appelle somme de $F$ et $G$ et on note $F+G$ l'ensemble :

$$F+G = \{x_1+x_2,\ x_1 \in F, x_2 \in G\} = \{x \in E, \exists (x_1,x_2) \in F\times G, x = x_1+x_2\}.$$

**Proposition 12**

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $F$ et $G$ sont deux sous-espaces vectoriels de $E$. Alors $F+G$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

**Proposition 13**

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $\mathcal{F} = (x_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ et $\mathcal{G} = (y_k)_{k\in[\![1,p]\!]}$ des familles de vecteurs de $E$. On a :

$$\mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_n) + \mathrm{Vect}(y_1,\dots,y_p) = \mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_p).$$

### 1.5 Somme directe de deux sous-espaces vectoriels, sous-espaces supplémentaires

**Définition 6**

Soit $E$un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F,G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$.
On dit que la somme $F+G$ est directe si et seulement si $F\cap G = \{0_E\}$. On note alors $F+G = F\oplus G$.

**Proposition 14**

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$.
La somme $F+G$ est directe si et seulement si :

$$\forall x \in F+G, \exists! (x_1,x_2) \in F\times G, x = x_1+x_2.$$

**Remarque :** La somme directe correspond à l'**unicité** de la décomposition.

**Définition 7**

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F$, $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$. On dit que $F$ et $G$ sont supplémentaires dans $E$ ssi :

$$E = F\oplus G,$$

c'est -à-dire ssi :

$$E = F+G \text{ et } F\cap G = \{0_E\}$$

c'est -à-dire ssi :

$$\forall x \in E, \exists! (x_1,x_2) \in F\times G, x = x_1+x_2.$$

➪ **Exemple 3 :**

- Posons $E = \mathbb{R}^2$, $u = (1,0)$, $F = \mathrm{Vect}(u)$, $v = (x,y)$ avec $y \neq 0$ et $G = \mathrm{Vect}(v)$. Montrer que :

$$E = F\oplus G.$$

On a montré que $F$ admet une infinité de supplémentaires, il n'y a donc pas unicité du supplémentaire.

- Posons $E=\mathbb{R}^3$, $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x+y-z=0\}$ et $G=\operatorname{Vect}(u)$ avec $u=(1,1,1)$. Montrer que :
$$E=F\oplus G.$$
- Posons $E=\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $F=\{f\in\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f(0)=0\}$ et $G=\{f\in\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \exists\lambda\in\mathbb{R},\ f=\lambda\}$. Montrer que :
$$E=F\oplus G.$$

➪ **Exemple 4 :**
Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soient $A$ et $B$ des sous-espaces vectoriels de $E$, soit $C$ un supplémentaire de $A\cap B$ dans $B$, c'est-à-dire tel que $(A\cap B)\oplus C=B$.
Montrer que $A$ et $C$ sont supplémentaires dans $A+B$.

# II Familles finies de vecteurs

Dans toute cette partie, $n$ désigne un entier naturel non nul et $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

## 2.1 Famille libre, famille liée

**Définition 8**

Soit $x_1,...,x_n$ des éléments de $E$.

- On dit que la famille $(x_1,\dots,x_n)$ est liée ssi :
$$\exists(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n\setminus\{(0,\dots,0)\},\ \sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i=0.$$
- On dit que $(x_1,\dots,x_n)$ est libre de $E$ ssi elle n'est pas liée c'est-à-dire ssi :
$$\forall\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{K},\quad \Big(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i=0\implies\forall i\in[\![1,n]\!],\ \lambda_i=0\Big).$$
Si $(x_1,\dots,x_n)$ est libre, on dit que les vecteurs $x_1,\dots,x_n$ sont linéairement indépendants.

**Remarque :**
- $(x_1,x_2)$ est libre ssi $x_1$ et $x_2$ ne sont pas colinéaires.
- $(x_1,x_2,x_3)$ est libre ssi $x_1$, $x_2$ et $x_3$ ne sont pas coplanaires.
- L'argument "les fonctions cos et sin ne sont pas proportionnelles" est un argument de liberté.

➪ **Exemple 5 :**
Les familles suivantes sont-elles libres ou liées ?
- Dans $E=\mathbb{R}^3$, $x_1=(1,0,1)$, $x_2=(1,0,-1)$, $x_3=(0,1,0)$,
- Dans $E=\mathbb{R}^3$, $x_1=(1,0,1)$, $x_2=(1,1,1)$, $x_3=(0,1,0)$,
- Dans $E=\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $f_1:x\mapsto 1$, $f_2:x\mapsto x$, $f_3:x\mapsto\sin x$.

**Proposition 15**

- Une famille à un vecteur $(x)$ est libre si et seulement si $x\neq 0_E$.
- Si $(x_1,\dots,x_n)$ est libre, alors : $\forall i\neq j$, $x_i\neq x_j$.
Soit $p\leq n$.
- Si $(x_1,\dots,x_n)$ est libre alors $(x_1,...,x_p)$ est libre.
- Si $(x_1,...,x_p)$ est liée alors $(x_1,...,x_n)$ est liée.

**Proposition 16**

Soit $(x_1,...,x_n)$ une famille d'éléments de $E$. $(x_1,\dots,x_n)$ est liée ssi l'un des vecteurs $x_i$ s'exprime comme combinaison linéaire des autres.

**Théorème 1**

Soit $(x_1, ..., x_n)$ une famille libre d'éléments de $E$
Soit $x \in E$ tel que la famille $(x, x_1, \dots, x_n)$ soit liée. Alors :

$$\exists!(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i.$$

**Définition 9**

On dit que la famille $(P_0, \dots, P_n)$ de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ est de degrés échelonnés ssi $\deg(P_0) < \cdots < \deg(P_n)$.

**Proposition 17**

Toute famille finie de polynômes non nuls et de degrés échelonnés est libre.
Plus généralement, toute famille finie de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts est libre.

### 2.2 Famille génératrice d'un sous-espace vectoriel

**Définition 10**

Une famille $(x_1, x_2, ..., x_n)$ de vecteurs de $E$ est dite génératrice de $E$ ssi :

$$\mathrm{Vect}\,(x_1, x_2, ..., x_n) = E.$$

Autrement dit, $(x_1, ..., x_n)$ est génératrice de $E$ ssi :

$$\forall x \in E, \exists \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K},\ x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i.$$

➪ **Exemple 6 :**

1. Posons $E = \mathbb{R}^3$, $x_1 = (1, 1, -1)$, $x_2 = (1, -1, 1)$, $x_3 = (-1, 1, 1)$. Montrer que la famille $(x_1, x_2, x_3)$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$.
2. Posons $E = \mathbb{R}_1[X]$, $P_1 = X$, $P_2 = X + 1$ et $P_3 = X - 1$. Montrer que la famille $(P_1, P_2, P_3)$ est génératrice de $E$.

### 2.3 Bases

**Définition 11**

Une famille d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ est une base de $E$ ssi la famille est libre et génératrice de $E$.

➪ **Exemple 7 :**

1. On reprend l'exemple précédent : posons $E = \mathbb{R}^3$, $x_1 = (1, 1, -1)$, $x_2 = (1, -1, 1)$, $x_3 = (-1, 1, 1)$. Montrer que la famille $(x_1, x_2, x_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Posons $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x - y + z = 0\}$. Déterminer une base de $E$.
3. Posons $E = \{P \in \mathbb{R}_2[X],\ P'(0) = 0\}$. Déterminer une base de $E$.

**Théorème 2**

Une famille $(e_1, ..., e_n)$ d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel $E$ est une base de $E$ ssi :

$$\forall x \in E, \exists!(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i.$$

**Définition 12**

Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $E$. On appelle coordonnées de $x$ dans la base $B$ l'unique $n$-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$.

**Proposition 18**

- Dans $\mathbb{K}^n$, on pose :
$$e_1 = (1,0,0,\dots,0), e_2 = (0,1,0,\dots,0),\dots, e_n = (0,0,...,0,1).$$
La famille $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$ appelée base canonique de $\mathbb{K}^n$.
- La famille $(1, X,\dots, X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ appelée base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ .
- Dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, pour $(i, j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, on note $E_{i,j}$ la matrice élémentaire d'indice $(i, j)$, c'est-à-dire la matrice n'ayant que des 0, sauf un 1 en position $(i, j)$.
La famille $(E_{i,j})_{1\leq i\leq n,1\leq j\leq p}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ appelée base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

### 2.4 Bases et espaces supplémentaires

**Proposition 19**

Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$.
Soient $(f_1,\dots,f_p)$ une famille de $F$ et $(g_1,\dots,g_q)$une famille de $G$.
Si $(f_1,\dots,f_p)$ et $(g_1,\dots,g_q)$ sont des bases respectivement de $F$ et $G$ et si $F$ et $G$ sont supplémentaires dans $E$ alors $(f_1,\dots,f_p, g_1,\dots,g_q)$ est une base de $E$, appelée base adaptée à la somme directe $E = F\oplus G$.

## III Espaces vectoriels de dimension finie

### 3.1 Dimension d'un espace vectoriel

**Définition 13**

On dit qu'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ est de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie.
Dans le cas contraire, on dit que $E$ est de dimension infinie.

**Proposition 20**

Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $\mathcal{G} = (x_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille génératrice finie de $E$.
Si $\mathcal{L} = (x_i)_{i\in J}$, avec $J \subset [\![1,n]\!]$, est une sous-famille libre de $\mathcal{G}$, alors il existe $I$ tel que $J \subset I \subset [\![1,n]\!]$ et tel que $\mathcal{B} = (x_i)_{i\in I}$ soit une base de $E$.

*Preuve.*
Notons :
$$A = \{\mathrm{Card}\,(I), J \subset I \subset [\![1,n]\!] \text{ et } (x_i)_{i\in I} \text{ libre } \}.$$
La partie $A$ de $\mathbb{N}$ est non vide (car contient $Card(J)$ et elle est majorée par $n$, elle admet donc un maximum $p$.
✎ *On considère le maximum, car on ne s'intéresse qu'aux familles libres dans la définition de A, il faut donc en chercher une de cardinal maximum pour espérer qu'elle soit génératrice.*
Soit $I$ un ensemble tel que $J \subset I \subset [\![1,n]\!]$, $(x_i)_{i\in I}$ libre et $\mathrm{Card}\,(I) = p$.
✎ *Un tel ensemble existe car le maximum est atteint.*
Montrons que $\mathcal{B} = (x_i)_{i\in I}$ est une base de $E$.
Par définition $\mathcal{B}$ est libre.
Montrons que $\mathcal{B}$ est génératrice de $E$.
✎ *On sait que $(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est génératrice de $E$, donc ce n'est pas la peine de partir d'un vecteurs quelconque de $E$, on peut partir d'un des $x_i$. De plus, si $i \in I$, $x_i$ est déjà dans $\mathcal{B}$ donc ce n'est pas la peine de traiter ce cas.*
Soit $k \in [\![1,n]\!] \setminus I$.
Comme $p = \max A$, alors la famille $(x_k)\cup(x_i)_{i\in I}$ est liée.
✎ *Elle est liée car de cardinal $p+1 > p$.*
Or, comme $(x_i)_{i\in I}$ est libre, il existe $(\lambda_i)_{i\in I}$ famille de $\mathbb{K}$ telle que :
$$x_k = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i.$$
✎ *C'est le théorème 1.*
Ainsi : $x_k \in \mathrm{Vect}\,(x_i)_{i\in I}$.
De plus, si $k \in I$, alors $x_k \in \mathrm{Vect}\,(x_i)_{i\in I}$ Donc :
$$\mathrm{Vect}\,(x_k)_{k\in[\![1,n]\!]} \subset \mathrm{Vect}\,(x_i)_{i\in I}.$$

Or $\operatorname{Vect}(x_k)_{k\in[\![1,n]\!]} = E$ car $\mathcal{G}$ est une famille génératrice de $E$. Donc :

$$\operatorname{Vect}(x_i)_{i\in I} = E.$$

Ainsi $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de $E$.
Donc $\mathcal{B}$ est une base de $E$.

$\square$

**Corollaire 3**

Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ de dimension finie non réduit à $\{0\}$ admet au moins une base.

**Notation :** Soit $\mathcal{F} = (e_1, ..., e_n)$ une famille finie d'éléments de $E$.
Le nombre de vecteurs (distincts ou non) de $\mathcal{F}$ est appelé le cardinal de $\mathcal{F}$ et est noté $\operatorname{Card}(\mathcal{F})$. On a donc :

$$\operatorname{Card}(\mathcal{F}) = n.$$

**Proposition 21 : Lemme de Steinitz**

Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ engendré par $n$ vecteurs, toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.

*Preuve.* Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille génératrice de $E$.
Soit $(x_j)_{j\in[\![1,n+1]\!]}$ une famille de $n+1$ vecteurs de $E$.
Pour tout $j \in [\![1, n+1]\!]$, on pose $x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$.
✎ *On peut le faire car* $(e_1, \dots, e_n)$ *une famille génératrice de* $E$. *On utilise une double indexation car les scalaires dépendent du vecteur que l'on décompose.*
Soit $(\lambda_1, ..., \lambda_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1}$ on a :

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j x_j = 0_E &\iff \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i\right) = 0_E \\ &\iff \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j a_{i,j}\right) e_i = 0_E\end{aligned}$$

✎ *On cherche des informations pour obtenir une combinaison linéaire nulle.*
Or,

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j a_{i,j} = 0 \iff \begin{cases} \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j a_{1,j} = 0 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j a_{n,j} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 a_{1,1} + \lambda_2 a_{1,2} + \cdots + \lambda_{n+1} a_{1,n+1} = 0 \\ \vdots \\ \lambda_1 a_{n,1} + \lambda_2 a_{n,2} + \cdots + \lambda_{n+1} a_{n,n+1} = 0 \end{cases} \quad (S)$$

$(S)$ est un système homogène à $n$ équations et $n+1$ inconnues. Ainsi, il admet une infinité de solutions donc au moins une non nulle. Ainsi,
il existe $(\lambda_1, ..., \lambda_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{(0, ..., 0)\}$ tel que : $\begin{cases} \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j a_{1,j} = 0 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j a_{n,j} = 0 \end{cases}$,
donc tel que : $\forall i \in [\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j a_{i,j} = 0$, donc tel que : $\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j x_j = 0$.
Ainsi la famille $(x_1, ..., x_{n+1})$ est liée. $\square$

**Corollaire 4**

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel admettant une famille génératrice constituée de $n$ vecteurs. Alors :

- Toute famille libre de $E$ admet au plus $n$ éléments.
- Toute famille d'au moins $n+1$ éléments est liée.

**Théorème 3**

Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, toutes les bases ont même nombre d'éléments.

**Définition 14**

- Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0\}$. On appelle dimension de $E$ et on note $\dim(E)$ le nombre d'éléments de chacune de ses bases.
- Si $E=\{0\}$, on pose par convention $\dim(E)=0$.

**Remarque :** L'espace réduit à 0 n'admet pas de base mais il admet une dimension qui est 0.

➪ **Exemple 8 :**
Calculer la dimension des espaces suivants :

1. $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ 2x-y+z=0\}$,
2. $E=\{(x,2x,3x),\ x\in\mathbb{R}\}$,
3. $E=\mathrm{Vect}(f_1,f_2)$,
4. $E=\{(x,y)\in\mathbb{C}^2,\ 2x=y\}$, on traitera le cas où $E$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et celui où $E$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

**Remarque :** On a déjà vu la dimension des espaces suivants :

- L'ensemble des solutions de $y'+a(x)y=0$ est $\mathrm{Vect}(x\mapsto e^{-A(x)})$, il est de dimension 1.
- L'ensemble des solutions de $ay''+by'+cy=0$ est $\mathrm{Vect}(u,v)$, avec :
  - $u:x\mapsto e^{r_1x}$ et $v:x\mapsto e^{r_2x}$ si $b^2-4ac\neq 0$ dans $\mathbb{C}$ ou $b^2-4ac>0$ dans $\mathbb{R}$.
  - $u:x\mapsto e^{rx}$ et $v:x\mapsto xe^{rx}$ si $b^2-4ac=0$.
  - $u:x\mapsto e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ et $v:x\mapsto e^{\alpha x}\sin(\beta x)$ si $b^2-4ac<0$ dans $\mathbb{R}$.

  Dans tous les cas, il est de dimension 2.
- L'ensemble des suites telles que : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n$ est $\mathrm{Vect}((v_n),(w_n))$, avec :
  - $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=r_1^n$ et $v_n=r_2^n$ si $a^2-4b\neq 0$.
  - $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=r^n$ et $v_n=nr^n$ si $a^2-4b=0$.

  Dans tous les cas, il est de dimension 2.

**Théorème 4**

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0\}$. Soit $\mathcal{L}$ une famille libre de $E$, soit $\mathcal{G}$ une famille génératrice de $E$.
Alors, on peut compléter $\mathcal{L}$ par des éléments de $\mathcal{G}$ pour obtenir une base de $E$.

**Corollaire 5 : Théorème de la base incomplète**

Soit $E$ un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension $n\in\mathbb{N}^*$.
Soit $(x_1,\dots,x_p)$, $p\leq n$ une famille libre de $E$. Alors, il existe $x_{p+1},\dots,x_n\in E$ tels que $(x_1,\dots,x_n)$ soit une base de $E$.

**Corollaire 6 : Théorème de la base extraite**

Soit $E$ un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension $n\in\mathbb{N}^*$.
Soit $(x_1,\dots,x_p)$, $p\geq n$ une famille génératrice de $E$. Alors, il existe $I\subset[\![1,p]\!]$ tels que $(x_i)_{i\in I}$ soit une base de $E$.

**Corollaire 7**

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$. Alors :

- Toute famille libre de $E$ admet au plus $n$ éléments.
- Toute famille de $E$ ayant au moins $n+1$ éléments est liée.
- Toute famille génératrice de $E$ admet au moins $n$ éléments.

## 3.2 Exemples

**Proposition 22**

- $\dim(\mathbb{K}^n)=n$
- $\dim(\mathbb{K}_n[X])=n+1$
- $\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))=np$

**Corollaire 8**

$\mathbb{K}[X]$ et $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ sont de dimension infinie.

### 3.3 Caractérisation des bases

**Proposition 23**

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{F}$ une famille formée de $n$ éléments. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- $\mathcal{F}$ est libre.
- $\mathcal{F}$ est génératrice de $E$.
- $\mathcal{F}$ est une base de $E$.

**Corollaire 9**

Dans le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$, soient $n+1$ polynômes $P_0$, $P_1$, ..., $P_n$ tels que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on ait $\deg(P_k) = k$. Alors la famille $(P_0, ..., P_n)$ forme une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

➪ **Exemple 9 :** Posons : $\forall k \in \mathbb{N}$, $P_k = (X+k)^k$.
Montrer que la famille $(P_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et de $\mathbb{C}_n[X]$.

### 3.4 Rang d'une famille finie de vecteurs

**Définition 15**

Soit $\mathcal{F}$ est une famille finie de vecteurs de $E$, on appelle rang de $\mathcal{F}$ et on note $\operatorname{rg}(\mathcal{F})$ la dimension de $\operatorname{Vect}(\mathcal{F})$ :

$$\operatorname{rg}(\mathcal{F}) = \dim(\operatorname{Vect}(\mathcal{F})).$$

**Proposition 24**

Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ des familles finies de $E$.

$$\mathcal{F} \subset \mathcal{F}' \Rightarrow \operatorname{rg}\mathcal{F} \leq \operatorname{rg}\mathcal{F}'.$$

**Proposition 25**

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel dimension finie $n$. Soit $(e_1, ..., e_p)$ une famille d'éléments de $E$. On a :

- $\operatorname{rg}(e_1, \dots, e_p) \leq \min(n, p)$.
- La famille $(e_1, \dots, e_p)$ est libre si et seulement si $\operatorname{rg}(e_1, \dots, e_p) = p$.

**Remarque :** En pratique, pour faire une calcul de rang, on élimine les vecteurs qui sont combinaisons linéaires des autres vecteurs jusqu'à se ramener à une famille libre.

➪ **Exemple 10 :**
Calculer le rang des familles suivantes :

1. $x_1 = (1,0,1)$, $x_2 = (1,-1,2)$, $x_3 = (-1,2,-3)$,
2. $x_1 = (1,0,1)$, $x_2 = (1,1,3)$, $x_3 = (0,1,2)$, $x_4 = (1,2,4)$.

## IV Sous-espaces d'un espace vectoriel de dimension finie

### 4.1 Dimension

**Proposition 26**

Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $F$ un sous-espace vectoriel de $E$. Alors

- $F$ est de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$
- $\dim E = \dim F$ si et seulement si $F = E$.

*Preuve.*

- Notons $n = \dim E \in \mathbb{N}$.
Si $F = \{0\}$ alors $\dim F = 0$ et le résultat est immédiat.
On suppose dans toute la suite $F \neq \{0_E\}$ et a fortiori $E \neq \{0_E\}$.
Comme $F \neq \{0_E\}$, il existe $x_1 \in F \setminus \{0_E\}$. $(x_1)$ est alors une famille libre de $F$.
✎ *On ne sait pas que $F$ est de dimension finie, cela fait partie de ce que l'on peut prouver, on ne peut donc pas considérer de famille génératrice de $F$. On considère donc une famille libre.*
On pose
$$A = \{\operatorname{Card} \mathcal{L},\ \mathcal{L} \text{ est une famille libre de } F\}$$
$A$ est une partie non vide ($1 \in A$ car $(x_1)$ est une famille libre de $F$) et majorée par $n$. En effet, toute famille libre de $F$ est une famille libre de $E$ donc a au plus $n$ vecteurs.
Ainsi, $A$ admet un plus grand élément $p \leq n$.
✎ *On cherche une famille libre la plus "grande" possible de façon à obtenir une base.*
Considérons $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_p)$ une famille libre de $p$ vecteurs de $F$. Montrons que $\mathcal{F}$ est génératrice de $F$.
Soit $x \in F$. La famille $(e_1, \dots, e_p, x)$ est une famille de $p+1$ vecteurs de $F$ donc cette famille est liée (par définition de $p$).
✎ *Car $p$ est le maximum.*
Ainsi, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p, \lambda \in \mathbb{K}$ non tous nuls tels que :
$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p + \lambda x = 0_E.$$
✎ *Il faut maintenant isoler $x$, on a donc envie de diviser par $\lambda$.*
Si $\lambda = 0$, alors $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p = 0_E$ donc pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $\lambda_i = 0$ car la famille $(e_1, \dots, e_p)$ est libre. Ceci contredit le fait que les scalaires sont non tous nuls.
Ainsi, $\lambda \neq 0$.
Donc :
$$x = \sum_{i=1}^{p} \frac{-\lambda_i}{\lambda} e_i \in \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_p).$$
Ainsi $(e_1, \dots, e_p)$ est génératrice de $F$.
Comme $(e_1, \dots, e_p)$ est libre, c'est une base de $F$.
Ainsi, $F$ est un espace vectoriel de dimension finie et $\dim F = p \leq n = \dim E$.
- Si $F = E$, on a clairement $\dim E = \dim F$.
- Supposons $\dim E = \dim F = n$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de $F$.
Alors $\mathcal{B}$ est une famille libre de $n$ vecteurs de $E$ (puisque $F \subset E$), et c'est donc une base de $E$.
Ainsi, $F = \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_n) = E$.

□

## 4.2 Sous-espaces vectoriels supplémentaires

**Théorème 5**

Tout sous espace vectoriel $F$ d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie admet au moins un supplémentaire.

**Proposition 27**

Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de dimensions finies d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel quelconque $E$ tels que $F + G$ soit directe. Alors $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$.

**Proposition 28 : Formule de Grassmann**

Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de dimensions finies d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque $E$ . Alors $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$.

**Proposition 29**

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie et $F$, $G$ deux sous espaces vectoriels de $E$. Alors, les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $E = F \oplus G$

(ii) $F \cap G = \{0\}$ et $\dim E = \dim F + \dim G$

(iii) $F + G = E$ et $\dim E = \dim F + \dim G$

➪ **Exemple 11 :** Posons $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X],\ P(2) = 0\}$ et $G = \mathbb{R}_0[X]$. Montrer que :
$$F \oplus G = \mathbb{R}_2[X].$$