Chapitre 13 : Limites et continuité

Dans tout le chapitre I désignera un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

I Limite d'une fonction en un point

1.1 Généralités

Définition 1

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et a un réel, élément de I ou extrémité finie de I. On dit que :

- f admet une limite (finie) $l \in \mathbb{R}$ en a, notée $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$, ssi :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\quad |x-a| \leq \eta \Longrightarrow |f(x)-l| \leq \varepsilon.$$

- f admet pour limite $+\infty$ en a, notée $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$, ssi :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\quad |x-a| \leq \eta \Longrightarrow f(x) \geq M$$

- f admet pour limite $-\infty$ en a, notée $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty$, ssi :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\quad |x-a| \leq \eta \Longrightarrow f(x) \leq M$$

Illustration :

Définition 2

Soient $f : I \to \mathbb{R}$. On suppose que $+\infty$ est une extrémité de I. On dit que :

- f admet une limite (finie) $l \in \mathbb{R}$ en $+\infty$, notée $f(x) \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} l$, ssi :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\quad x \geq A \Longrightarrow |f(x)-l| \leq \varepsilon.$$

- f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$, notée $f(x) \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, ssi :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\quad x \geq A \Longrightarrow f(x) \geq M$$

- f admet pour limite $-\infty$ en $+\infty$, notée $f(x) \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$, ssi :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\quad x \geq A \Longrightarrow f(x) \leq M$$

Illustration :

Définition 3

Soient $f : I \to \mathbb{R}$. On suppose que $-\infty$ est une extrémité de I. On dit que :

- f admet une limite (finie) $l \in \mathbb{R}$ en $-\infty$, notée $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} l$, si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I, \quad x \leq A \Longrightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$

- f admet pour limite $+\infty$ en $-\infty$, notée $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$, si :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I, \quad x \leq A \Longrightarrow f(x) \geq M$$

- f admet pour limite $-\infty$ en $-\infty$, notée $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$, si :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I, \quad x \leq A \Longrightarrow f(x) \leq M$$

Proposition 1 : Unicité de la limite

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et a un élément ou une extrémité de I (éventuellement $\pm\infty$). Si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l_1$ et $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l_2$ avec l_1 , $l_2 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ alors $l_1 = l_2$. La limite de f en a est alors notée :

$$\lim_{x\to a} f(x) \text{ ou } \lim_{a} f.$$

Preuve.

$\square$

Proposition 2

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. Si f possède une limite en a, alors :

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Preuve.

$\square$

1.2 Fonctions bornées

Définition 4

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et a un élément de I ou une extrémité de I (éventuellement $\pm\infty$).

- Si $a \in \mathbb{R}$, on dit que f vérifie la propriété P au voisinage de a ssi il existe $r > 0$ tel que f vérifie P sur $I \cap]a-r, a+r[$.
- Si $a = +\infty$, on dit que f vérifie la propriété P au voisinage de a ssi il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que f vérifie P sur $I \cap]A, +\infty[$.
- Si $a = -\infty$, on dit que f vérifie la propriété P au voisinage de a ssi il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que f vérifie P sur $I \cap] - \infty, A[$.

Proposition 3

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et a un point ou une extrémité de I (éventuellement $\pm\infty$). Si f admet une limite finie en a, alors f est bornée au voisinage de a.

Remarque : La fonction n'est bornée que sur un voisinage de a. Dans le cas des suites, une suite convergente est également bornée à partir d'un certain rang mais comme les termes restants sont en nombre fini, on peut conclure que la suite est bornée. Mais, ce raisonnement ne s'applique pas aux fonctions.

1.3 Limite à droite, limite à gauche

Définition 5

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et a un élément ou une extrémité finie de I.

- Si a n'est pas l'extrémité inférieure de I. On dit que f admet une limite à gauche en a ssi $f|_{I\cap]-\infty,a[}$ admet une limite en a. Cette limite est alors notée : $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$.
- Si a n'est pas l'extrémité supérieure de I. On dit que f admet une limite à droite en a ssi $f|_{I\cap]a,+\infty[}$ admet une limite en a. Cette limite est alors notée : $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$

Remarque :

- $l = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, -\eta \leq x - a < 0 \Longrightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$
- $l = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, 0 < x - a \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$
- La valeur a est exclue donc, la valeur des limites à gauche et à droite n'est pas nécessairement $f(a)$.

➪ **Exemple 1 :** Calculer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x}$

- Soit $n \in \mathbb{Z}$
  $\lim\limits_{x \to n^+} \lfloor x \rfloor$

  $\lim\limits_{x \to n^-} \lfloor x \rfloor$

Proposition 4

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et a un élément de I qui ne soit pas une extrémité de I. Soit $l \in \mathbb{R}$. On a :

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \iff \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = l \\ \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = l \\ l = f(a) \end{array} \right.$$

1.4 Caractérisation séquentielle de la limite

Théorème 1 : Caractérisation séquentielle de la limite

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, a un élément ou une extrémité de I (éventuellement $\pm\infty$) et $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.
La fonction f admet pour limite l en a si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de I qui tend vers a, la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers l.

Preuve.

□

Remarque : Ce résultat est utile pour prouver la non existence de limites.

➪ **Exemple 2 :**

- Montrer que cos n'a pas de limite en $+\infty$.

- Montrer que $\mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0.

1.5 Opérations sur les limites

Les preuves de ces résultats sont analogues à celles vues pour les suites.

Proposition 5

Soit a un élément ou une extrémité de I (éventuellement $\pm\infty$). Soient $f,\ g : I \to \mathbb{R}$ telles que $\lim_{x\to a} f(x) = l \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x\to a} g(x) = l' \in \mathbb{R}$. Alors :

- $\lim_{x\to a} (f+g)(x) = l + l'$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to a} \lambda f(x) = \lambda l$.
- $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = ll'$.
- Si $l \neq 0$, $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l}$.
- Si $l' \neq 0$, $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{l'}$.

Proposition 6

Soit a un élément ou une extrémité de I (éventuellement $\pm\infty$). Soient $f,\ g : I \to \mathbb{R}$ telles que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ et g est bornée alors $\lim_{x\to a} f(x).g(x) = 0$.

Proposition 7

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ et a un élément ou une extrémité de I (éventuellement $\pm\infty$).

- Si $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ et si g est minorée au voisinage de a alors $\lim_{x\to a} (f(x)+g(x)) = +\infty$.
- Si $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ et si $\lim_{x\to a} g(x) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ alors $\lim_{x\to a} (f(x)+g(x)) = +\infty$.
- Si $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ et si g est majorée au voisinage de a alors $\lim_{x\to a} (f(x)+g(x)) = -\infty$.
- Si $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ et si $\lim_{x\to a} g(x) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ alors $\lim_{x\to a} (f(x)+g(x)) = -\infty$.
- Si $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ et si g est minorée par une constante strictement positive au voisinage de a alors $\lim_{x\to a} f(x).g(x) = +\infty$.
- Si $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ et si $\lim_{x\to a} g(x) \in \mathbb{R}^{+*} \cup \{+\infty\}$ alors $\lim_{x\to a} f(x).g(x) = +\infty$.
- Si $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ et si g est majorée par une constante strictement négative au voisinage de a alors $\lim_{x\to a} f(x).g(x) = -\infty$.
- Si $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ et si $\lim_{x\to a} g(x) \in \mathbb{R}^{-*} \cup \{-\infty\}$ alors $\lim_{x\to a} f(x).g(x) = -\infty$.
- Si $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ et si g est minorée par une constante strictement positive au voisinage de a alors $\lim_{x\to a} f(x).g(x) = -\infty$.
- Si $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ et si $\lim_{x\to a} g(x) \in \mathbb{R}^{+*} \cup \{+\infty\}$ alors $\lim_{x\to a} f(x).g(x) = -\infty$.
- Si $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ et si g est majorée par une constante strictement négative au voisinage de a alors $\lim_{x\to a} f(x).g(x) = +\infty$.
- Si $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ et si $\lim_{x\to a} g(x) \in \mathbb{R}^{-*} \cup \{-\infty\}$ alors $\lim_{x\to a} f(x).g(x) = +\infty$.

Proposition 8

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ telles que $f(I) \subset J$. Soit a un élément ou une extrémité de I (éventuellement $\pm\infty$).
Soit b un élément ou une extrémité de J (éventuellement $\pm\infty$). Soit $c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$
Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{y\to b} g(y) = c$, alors $g \circ f$ admet une limite en a et $\lim\limits_{x\to a}(g\circ f)(x) = c$.

Preuve.

□

➪ **Exemple 3 :** Calculer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x + 1}{x^2}$

- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{2x+7}-3}$

- $\lim_{x\to+\infty} (x - \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}))$

- $\lim_{x\to+\infty} x \sin \frac{1}{x}$

- $\lim_{x\to 0} |\ln(x)|^{1/\ln(x)}$

1.6 Limites et inégalités

Proposition 9

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ et a un point ou une extrémité de I (éventuellement $\pm\infty$).
Si f et g admettent une limite finie en a et si $f \leq g$ au voisinage de a. Alors :

$$\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x).$$

Proposition 10

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et a un point ou une extrémité de I (éventuellement $\pm\infty$) et $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Si f admet une limite l en a alors :

- Pour tout $M > l$, f est majorée par M au voisinage de a.
- Pour tout $m < l$, f est minorée par m au voisinage de a.

1.7 Existence de limites et inégalités

Théorème 2 : Théorème d'encadrement

Soient f, g et $h : I \to \mathbb{R}$ et a un élément ou une extrémité de I (éventuellement $\pm\infty$). Si :

- $f \leq g \leq h$ au voisinage de a
- $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = l$

alors, g admet une limite en a et $\lim_{x\to a} g(x) = l$.

Théorème 3 : Théorème de majoration/minoration

Soient f et g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$, a un élément ou une extrémité de I (éventuellement $\pm\infty$).

1. Si $\begin{cases} f(x) \leq g(x) \text{ au voisinage de } a \\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty \end{cases}$, alors $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$.
2. Si $\begin{cases} f(x) \leq g(x) \text{ au voisinage de } a \\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty \end{cases}$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

1.8 Théorème de la limite monotone

Définition 6

Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

• Si $f(I)$ admet un maximum, on l'appelle le maximum de f et on note :

$$\max_{x\in I} f(x) = \max_I f = \max f(I).$$

• Si $f(I)$ admet un minimum, on l'appelle le minimum de f et on note :

$$\min_{x\in I} f(x) = \min_I f = \min f(I).$$

• Si f est majorée alors $f(I)$ est majorée donc $\sup f(I)$ existe, on l'appelle la borne supérieure de f et on note :

$$\sup_{x\in I} f(x) = \sup_I f = \sup f(I).$$

• Si f est minorée alors $f(I)$ est minorée donc $\inf f(I)$ existe, on l'appelle la borne inférieure de f et on note :

$$\inf_{x\in I} f(x) = \inf_I f = \inf f(I).$$

Théorème 4 : Théorème de la limite monotone

Soient $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ tels que $a < b$ et $f :]a,b[\to \mathbb{R}$.

- Si f est croissante, on a :
  - Si f est majorée, alors f admet une limite finie en b et $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \sup\limits_{x\in]a,b[} f(x)$.
  - Si f est minorée, alors f admet une limite finie en a et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \inf\limits_{x\in]a,b[} f(x)$
- Si f est décroissante, on a :
  - Si f est minorée, alors f admet une limite finie en b et $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \inf\limits_{x\in]a,b[} f(x)$
  - Si f est majorée, alors f admet une limite finie en a et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \sup\limits_{x\in]a,b[} f(x)$

Preuve.

$\square$

➪ **Exemple 4 :** Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction strictement croissante. On suppose que : $\lim\limits_{\infty} f = l \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \ f(x) < l.$$

Proposition 11

Soient $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ tels que $a < b$ et $f :]a, b[\to \mathbb{R}$.

- Si f est croissante non majorée, alors $\lim\limits_{b} f = +\infty$.
- Si f est croissante non minorée, alors $\lim\limits_{a} f = -\infty$.
- Si f est décroissante non majorée, alors $\lim\limits_{a} f = +\infty$.
- Si f est décroissante non minorée, alors $\lim\limits_{b} f = -\infty$.

Preuve.

□

Corollaire 1

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction monotone et $a \in I$ tel que a ne soit pas une extrémité de I. Alors, f admet des limites finies à gauche et à droite en a et on a :

- Si f est croissante :
$$\lim_{x \to a^-} f(x) \leq f(a) \leq \lim_{x \to a^+} f(x)$$
- Si f est décroissante :
$$\lim_{x \to a^+} f(x) \leq f(a) \leq \lim_{x \to a^-} f(x)$$

Preuve.

□

II Continuité en un point

2.1 Généralités

Définition 7

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.
On dit que f est continue en a si et seulement si :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a),$$

c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon.$$

Dans le cas contraire, on dit que f est discontinue en a.

➪ **Exemple 5 :** Montrer que $|.|$ est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

Définition 8

Soit $a \in I$ et $f : I \backslash \{a\} \to \mathbb{R}$. On dit que f est prolongeable par continuité en a si et seulement si il existe une fonction $g : I \to \mathbb{R}$ telle que $g|_{I\backslash\{a\}} = f$ et g continue en a.

Proposition 12

Soit $a \in I$ et $f : I \backslash \{a\} \to \mathbb{R}$ une fonction.
f est prolongeable par continuité en a si et seulement si f admet une limite finie l en a.
Dans ce cas un tel prolongement est unique et est défini par :

$$g : \begin{array}{ccl} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ l & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

g est appelé le prolongement par continuité de f en a.

Remarque : En général, on confond f et son prolongement par continuité ce qui revient à poser $f(a) = \lim_a f$.

➪ **Exemple 6 :** Montrer que :

- $f : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.
- $f : x \mapsto \frac{\cos x}{x}$ n'est pas prolongeable par continuité en 0.
- $f : x \mapsto \frac{x}{|x|}$ n'est pas prolongeable par continuité en 0.

2.2 Continuité à gauche, à droite

Définition 9

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et a un élément de I qui n'est pas une extrémité. On dit que :

- f est continue à gauche en a si et seulement si :

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a),$$

- f est continue à droite en a si et seulement si :

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a).$$

Proposition 13

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et a un élément de I distinct de ses extrémités. On a l'équivalence :

f est continue en a si et seulement si f est continue à droite et à gauche en a.

➪ **Exemple 7 :** Etudier la continuité de $x \mapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$.

Remarque : L'existence de limites finies en a^+ et en a^- ne suffit pas, elles doivent être égales à $f(a)$.

➪ **Exemple 8 :** Etudier la continuité de $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\lfloor -x^2\rfloor$ en 0.

➪ **Exemple 9 :** Soit $f:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ une fonction croissante telle que $x\mapsto\frac{f(x)}{x}$ soit décroissante. Montrer que f est continue.

2.3 Opérations

Proposition 14

Soient $f,g:I\to\mathbb{R}$ deux fonctions continues en un point $a\in I$ et $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.
Alors les fonctions $\lambda f+\mu g$ et fg sont continues en a.
Si de plus, g ne s'annule pas en a, alors le fonction $\dfrac{f}{g}$ est continue en a.

Proposition 15

Soient $f:I\to\mathbb{R}$, $g:J\to\mathbb{R}$ avec $f(I)\subset J$. Si f est continue en a et si g est continue en $f(a)$. Alors, la fonction $g\circ f$ est continue en a.

2.4 Image d'une suite

Proposition 16

Soit $f:I\to\mathbb{R}$ une fonction continue en $a\in I$. Alors pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I convergeant vers a, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.

➪ **Exemple 10 :** Trouver toutes les applications $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continues en 0 telles que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=f\left(\frac{x}{2}\right).$$

Remarque : Ce résultat peut être utilisé avec le fait que tout réel est limite d'une suite de rationnels.

➪ **Exemple 11 :** Déterminer toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x,y\in\mathbb{R},\ f(x+y)=f(x)+f(y).$$

Plan d'étude :

- On raisonne par analyse-synthèse.
- On calcule $f(0)$.
- On raisonne par récurrence pour calculer $f(n)$ pour $n\in\mathbb{N}$.
- On trouve un lien entre $f(-x)$ et $f(x)$ pour en déduire $f(n)$ pour $n\in\mathbb{Z}$.
- On utilise les résultats précédents pour calculer $f(r)$ pour $r\in\mathbb{Q}$.
- Comme tout réel est limite d'une suite de rationnels, un argument de continuité permet de calculer $f(x)$ pour $x\in\mathbb{R}$.
- On fait la synthèse.

Proposition 17

Soient $f:I\to I$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant $u_0\in I$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, la relation $u_{n+1}=f(u_n)$. Si :

- la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente,
- sa limite l appartient à I,
- la fonction f est continue en l,

alors, l est un point fixe de f, c'est-à-dire :

$$f(l)=l.$$

Remarque : L'hypothèse de continuité est fondamentale. Par exemple, pour $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\frac{x}{2}$ si $x\neq 0$, 1 si $x=0$.
f n'est pas continue en 0.
Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0\in\mathbb{R}^*\text{ et }\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=f(u_n).$$

Alors (u_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ donc $\lim u_n=0$ et $f(0)\neq 0$.

III Continuité sur un intervalle

3.1 Intervalles

Définition 10 : Intervalles de $\mathbb{R}$

On appelle intervalle de $\mathbb{R}$ toute partie de $\mathbb{R}$ ayant l'une des formes suivantes :

$$[a,b],]a,b[, [a,b[,]a,b], [a,+\infty[,]a,+\infty[,]-\infty,b],]-\infty,b[, \{a\}, \mathbb{R}, \varnothing$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Proposition 18

Soit X une partie de $\mathbb{R}$. Alors :

$$X \text{ est un intervalle si et seulement si : pour tous } a, b \in X \text{ tels que } a \leq b \text{ , } [a,b] \subset X.$$

3.2 Généralités

Définition 11

On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est continue sur I si et seulement si elle est continue en tout point de I.
On note $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}^0(I)$ l'ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$. On dit qu'une fonction continue sur I est de classe $\mathcal{C}^0$ sur I.

Proposition 19

Soient $f, g \in \mathcal{C}^0(I)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a :

- $\lambda f + \mu g \in \mathcal{C}^0(I)$,
- $fg \in \mathcal{C}^0(I)$,
- si, de plus, g ne s'annule pas sur I, $\dfrac{f}{g} \in \mathcal{C}^0(I)$.

Proposition 20

Soient $f \in \mathcal{C}^0(I)$ et $g \in \mathcal{C}^0(J)$ avec $f(I) \subset J$. Alors :

$$g \circ f \in \mathcal{C}^0(I).$$

3.3 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 5 : Théorème des valeurs intermédiaires

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $a, b \in I$ tels que $a < b$. Alors, pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$,

$$\exists c \in [a,b],\ f(c) = y.$$

Remarque :

- c n'est pas unique en général
- Le résultat est faux en général si I n'est pas un intervalle.

➪ **Exemple 12 :** Soient f et g des fonctions continues qui ne s'annulent pas sur I et telles que $|f| = |g|$. Alors $f = g$ ou $f = -g$.

➪ **Exemple 13 :** Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, et soit $f : [a,b] \to [a,b]$ continue. Montrer qu'il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

➪ **Exemple 14 :** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f^n = f \circ f \circ f \cdots \circ f$ (avec n facteurs).
On suppose que f^n admet un point fixe. Montrer que f admet un point fixe.

Proposition 21 : Généralisations du théorème des valeurs intermédiaires

- Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a < b$. Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue admettant une limite (finie ou infinie) en a et en b.
  Soit $y \in] \lim\limits_{x \to a} f(x), \lim\limits_{x \to b} f(x)[$ ou $] \lim\limits_{x \to b} f(x), \lim\limits_{x \to a} f(x)[$, alors :
$$\exists c \in]a, b[,\ f(c) = y.$$
- Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue admettant une limite (finie ou infinie) en a.
  Soit $y \in] \lim\limits_{x \to a} f(x), f(b)]$ ou $[f(b), \lim\limits_{x \to a} f(x)[$, alors :
$$\exists c \in]a, b],\ f(c) = y.$$
- Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a < b$. Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue admettant une limite (finie ou infinie) en b.
  Soit $y \in] \lim\limits_{x \to b} f(x), f(a)]$ ou $[f(a), \lim\limits_{x \to b} f(x)[$, alors :
$$\exists c \in [a, b[,\ f(c) = y.$$

Corollaire 2

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone et $a, b \in I$ tels que $a < b$. Alors, pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un unique $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.

Corollaire 3

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

3.4 Fonctions continues sur un segment

Théorème 6 : Théorème des bornes atteintes

Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.
Autrement dit, si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a, b]$ avec $a < b$, alors il existe $c, d \in [a, b]$ tel que :
$$\forall x \in [a, b],\ f(c) \leq f(x) \leq f(d),$$

➪ **Exemple 15 :** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique. Montrer que f est bornée.

➪ **Exemple 16 :** Soient $f, g \in \mathcal{C}^0([0,1])$ telles que : $\forall x \in [0,1],\ f(x) < g(x)$. Montrer que :
$$\exists m > 0,\ \forall x \in [0,1],\ f(x) + m \leq g(x).$$

Corollaire 4

L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

3.5 Bijectivité

Proposition 22

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ strictement monotone. Posons :

$$\tilde{f} : \begin{array}{ccc} I & \to & f(I) \\ x & \mapsto & f(x). \end{array}$$

Alors $\tilde{f}$ est bijective.

Remarque :

- On confond souvent f et $\tilde{f}$.
- La réciproque est fausse : $f : [0,1] \to [0,1]$, $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ x & \text{si } x \in]0,1[\\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ est bijective et non strictement monotone.

Preuve.

□

Proposition 23

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ strictement monotone. Alors $\tilde{f}^{-1}$ est strictement monotone de même sens que f.

Lemme 1

Si f est monotone sur un intervalle I et si $f(I)$ est un intervalle alors f est continue sur I.

Preuve. Quitte à changer f en $-f$, on peut supposer f croissante.
Soit a un élément de I distinct de ses extrémités.
Montrons que f est continue en a.
Comme f est croissante, on sait que :

$$\lim_{x \to a^-} f(x) \leq f(a) \leq \lim_{x \to a^+} f(x)$$

Raisonnons par l'absurde et supposons que f n'est pas continue. Alors, une de ces inégalités est stricte.
Supposons par exemple : $f(a) < \lim_{x \to a^+} f(x)$.
Soit $y \in]f(a), \lim_{x \to a^+} f(x)[$.

- Comme a n'est pas l'extrémité supérieure de I, il existe $u \in I \cap]a, +\infty[$.
  On a alors : $\lim_{x \to xa^+} f(x) \leq f(u)$.
  En effet : $\forall z \in]a, u]$, $f(z) \leq f(u)$.
  En faisant tendre z vers a, on obtient le résultat.
  On a alors : $y \in [f(a), f(u)]$ avec $f(a), f(u) \in f(I)$. Donc $y \in f(I)$ car $f(I)$ est un intervalle.
  Donc $y \in f(I) \cap]f(a), \lim_{x \to a^+} f(x)[$. D'où $]f(a), \lim_{x \to a^+} f(x)[\subset f(I) \cap]f(a), \lim_{x \to a^+} f(x)[$.
- Soit $t \in I$.
  - Si $t \leq a$ alors $f(t) \leq f(a)$ car f est croissante.
  - Si $t > a$, alors $f(t) \geq \lim_{x \to a^+} f(x)$.
    En effet, on a : $\forall z \in]a, t]$, $f(z) \leq f(t)$.
    En passant à la limite lorsque z tend vers a, on obtient le résultat souhaité.

  D'où , $f(I) \cap]f(a), \lim_{x \to a^+} f(x)[= \emptyset$.

On obtient une contradiction car $]f(a), \lim_{x\to a^+} f(x)[\neq \emptyset$ et $]f(a), \lim_{x\to a^+} f(x)[\subset f(I)\cap]f(a), \lim_{x\to a^+} f(x)[$.
Donc $f(a) = \lim_{x\to a^+} f(x)$. De même on prouve que l'on a : $f(a) = \lim_{x\to a^-} f(x)$.
f est donc continue en a.
Si a est une extrémité de I on procède de même en ne conservant qu'une des deux inégalités.
Ainsi, f est continue sur I. □

Théorème 7

Toute fonction f continue et strictement monotone sur un intervalle I réalise une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$.
Sa bijection réciproque est continue et strictement monotone sur l'intervalle $f(I)$, et de même monotonie que f.

Preuve.
On a déjà prouvé que f^{-1} est strictement monotone sur l'intervalle $f(I)$, et de même monotonie que f. Il reste donc à prouver que f^{-1} est continue.
f^{-1} est monotone sur l'intervalle $f(I)$. De plus, $f^{-1}(f(I)) = I$ qui est un intervalle. Donc d'après le lemme, f^{-1} est continue sur $f(I)$. □

IV Fonctions à valeurs complexes

4.1 Définitions

Définition 12

Soient $f : I \to \mathbb{C}$ et a un élément ou une extrémité de I (éventuellement $\pm\infty$).

- On dit que f admet une limite $l \in \mathbb{C}$ en a ssi :

$$\begin{array}{ll} \text{Cas } a\in\mathbb{R} : & \forall\varepsilon>0,\ \exists\eta>0,\ \forall x\in I,\ |x-a|\leq\eta \implies |f(x)-l|\leq\varepsilon. \\ \text{Cas } a=+\infty : & \forall\varepsilon>0,\ \exists A\in\mathbb{R},\ \forall x\in I,\ x\geq A \implies |f(x)-l|\leq\varepsilon. \\ \text{Cas } a=-\infty : & \forall\varepsilon>0,\ \exists A\in\mathbb{R},\ \forall x\in I,\ x\leq A \implies |f(x)-l|\leq\varepsilon \end{array}$$

- On dit que f est continue en $a \in I$ ssi f admet $f(a)$ comme limite en a.
  On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I.
  On note $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbb{C}$.

Proposition 24

Soient $f : I \to \mathbb{C}$ et a un élément ou une extrémité de I (éventuellement $\pm\infty$).
f admet une limite (finie) en a si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ admettent des limites finies en a, et on a alors

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \mathrm{Re}(f(x)) + i \lim_{x\to a} \mathrm{Im}(f(x)).$$

Corollaire 5

Soient $f : I \to \mathbb{C}$, a un élément de I ou une extrémité de I (éventuellement $\pm\infty$) et $l \in \mathbb{C}$.
Si $\lim_{x\to a} f(x) = l$ alors $\lim_{x\to a} \overline{f(x)} = \overline{l}$.

Corollaire 6

Soit $f : I \to \mathbb{C}$. On a l'équivalence :
f est continue sur I si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont continues sur I.

4.2 Fonctions bornées

Définition 13

Soit $f : I \to \mathbb{C}$. On dit que f est bornée ssi :

$$\exists M\in\mathbb{R}^+, \forall x\in I,\ |f(x)|\leq M.$$

Proposition 25

Toute fonction $f : I \to \mathbb{C}$ admettant une limite finie en a (un élément de I ou une extrémité de I, éventuellement $\pm\infty$) est bornée au voisinage de a.

4.3 Opérations

Proposition 26

Soit a un élément ou une extrémité de I (éventuellement $\pm\infty$). Soient f, $g : I \to \mathbb{C}$ telles que $\lim\limits_{x\to a} f(a) = l \in \mathbb{C}$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l' \in \mathbb{C}$. Alors :

- Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\lim\limits_{x\to a}(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda l + \mu l'$.
- $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = ll'$.
- Si $l' \neq 0$, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l}{l'}$.

Proposition 27

Soient $f, g : I \to \mathbb{C}$ deux fonctions continues en un point $a \in I$.

- Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\lambda f + \mu g$ est continue en a.
- fg est continue en a.
- Si de plus, g ne s'annule pas en a, alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est continue en a.

Proposition 28

Soient $f, g \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$.

- Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\lambda f + \mu g \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$.
- $fg \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$.
- Si de plus, g ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{f}{g} \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$.