

# Chapitre 11 : Suites numériques

## I Limite d'une suite réelle

### 1.1 Généralités

#### Définition 1

- On dit qu'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $l \in \mathbb{R}$  ou tend vers  $l$ , et on note  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$  ou  $u_n \rightarrow l$ , si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies |u_n - l| \leq \varepsilon.$$

- On dit qu'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge s'il existe  $l \in \mathbb{R}$  tel que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $l$ .
- On dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge sinon.

**Illustration :**

#### Définition 2

- On dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge vers  $+\infty$  ou tend vers  $+\infty$ , et on note  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$  ou  $u_n \rightarrow +\infty$ , si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies u_n \geq A.$$

- On dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge  $-\infty$  ou tend vers  $-\infty$ , et on note  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$  ou  $u_n \rightarrow -\infty$ , si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies u_n \leq A.$$

**Remarque :** Une suite divergente peut : diverger vers  $+\infty$ , diverger vers  $-\infty$ , ou ne pas avoir de limite.

**Illustration :**

**Proposition 1**

Si la limite d'une suite  $(u_n)$  existe alors elle est unique. On la note  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  ou  $\lim u_n$ .

*Preuve.*

□

⇔ **Exemple 1 :** Montrons que :  $\lim \frac{1}{n} = 0$ .

⇔ **Exemple 2 :** Soit  $(u_n)$  une suite réelle telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{Z}.$$

Montrer que  $(u_n)$  converge si et seulement si  $(u_n)$  est stationnaire.

## 1.2 Propriétés des suites convergentes

### Proposition 2

Soient  $(u_n)$  une suite réelle et  $l \in \mathbb{R}$ .

Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $l$  alors  $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $|l|$ .

*Preuve.*

□

**Remarque :** La réciproque est fautive :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n$ .  $(u_n)$  est constante égale à 1 donc converge vers 1 mais  $(u_n)$  est divergente.

**Proposition 3**

Toute suite réelle convergente est bornée.

*Preuve.*

□

**Remarque :** La réciproque est fautive :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n$ .  $(u_n)$  est bornée mais divergente.

**Proposition 4**

Soient  $(u_n)$  une suite réelle et  $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ . Si  $(u_n)$  admet une limite  $l$  alors :

- Pour tout  $M > l$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\forall n \geq N, u_n \leq M.$$

- Pour tout  $m < l$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\forall n \geq N, u_n \geq m.$$

*Preuve.*

□

**Corollaire 1**

Soit  $(u_n)$  une suite réelle.

- Si  $(u_n)$  converge vers  $l > 0$ , alors  $u_n > 0$  à partir d'un certain rang.
- Si  $(u_n)$  converge vers  $l < 0$ , alors  $u_n < 0$  à partir d'un certain rang.

⇔ **Exemple 3** : Soit  $(u_n)$  une suite de réels strictement positifs telle que :

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = l, \text{ avec } l < 1.$$

Montrer que :  $\lim u_n = 0$ .

### 1.3 Opérations sur les limites

#### Proposition 5

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites qui convergent respectivement vers  $l, l' \in \mathbb{R}$ .

- Alors  $(u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $l + l'$ .
- Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $(\lambda u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\lambda l$ .
- $(u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $ll'$ .
- Si  $(u_n)$  converge vers  $l \in \mathbb{R}^*$ ,  $\left(\frac{1}{u_n}\right)$  est définie à partir d'un certain rang et converge vers  $\frac{1}{l}$ .

*Preuve.* • Soit  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$  tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_1 \implies |u_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_2 \implies |v_n - l'| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Posons  $N = \max(N_1, N_2)$ .

Soit  $n \geq N$ , on a :

$$\begin{aligned} |u_n + v_n - (l + l')| &= |(u_n - l) + (v_n - l')| \\ &\leq |u_n - l| + |v_n - l'| \quad \text{d'après l'inégalité triangulaire} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

Ainsi :  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies |(u_n + v_n) - (l + l')| \leq \varepsilon$ .

Donc  $(u_n + v_n)$  converge vers  $l + l'$ .

- Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ , par définition de la convergence, il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies |u_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{|\lambda| + 1}.$$

Soit  $n \geq N$ , on a :

$$\begin{aligned} |\lambda u_n - (\lambda l)| &= |\lambda(u_n - l)| \\ &\leq |\lambda| \times |u_n - l| \\ &\leq |\lambda| \times \frac{\varepsilon}{|\lambda| + 1} \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

Donc  $(\lambda u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\lambda l$ .

- Comme  $(v_n)$  est convergente donc bornée, ainsi, il existe  $M \in \mathbb{R}^{+*}$  tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |v_n| \leq M.$$

Soit  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$  tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_1 \implies |u_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2M},$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_2 \implies |v_n - l'| \leq \frac{\varepsilon}{2(|l| + 1)}.$$

Posons  $N = \max(N_1, N_2)$ .

Soit  $n \geq N$ , on a :

$$\begin{aligned} |u_n v_n - ll'| &= |(u_n - l)v_n + l(v_n - l')| \\ &\leq |u_n - l| \cdot |v_n| + |l| \cdot |v_n - l'| \quad \text{d'après l'inégalité triangulaire} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2M} M + |l| \frac{\varepsilon}{2(|l| + 1)} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

Ainsi :  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies |u_n v_n - ll'| \leq \varepsilon$ .

Donc  $(u_n v_n)$  converge vers  $ll'$ .

- Comme  $(|u_n|)$  converge vers  $|l| > 0$ , et  $|l| > \frac{|l|}{2}$  alors, d'après la proposition 4, il existe  $N_1 \in \mathbb{N}$  tel que :  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_1 \implies |u_n| > \frac{|l|}{2}$ .  
En particulier :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_1 \implies u_n \neq 0.$$

Soit  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N_2 \in \mathbb{N}$  tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_2 \implies |u_n - l| \leq \frac{\varepsilon l^2}{2},$$

Posons  $N = \max(N_1, N_2)$ .

Soit  $n \geq N$ , on a :

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{l} \right| &= \left| \frac{l - u_n}{u_n l} \right| \\ &\leq \frac{|u_n - l|}{|u_n| |l|} \\ &\leq \frac{2 \varepsilon l^2}{l^2} \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

Ainsi :  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies \left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{l} \right| \leq \varepsilon.$

Donc  $\left( \frac{1}{u_n} \right)$  converge vers  $\frac{1}{l}$ . □

### Proposition 6

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite qui converge vers 0 et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite bornée. Alors  $(u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0

*Preuve.*  $(v_n)$  est bornée donc il existe  $M \in \mathbb{R}^{+*}$  tel que :  $\forall n \in \mathbb{N}, |v_n| \leq M.$

Soit  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies |u_n| \leq \frac{\varepsilon}{M}.$$

Soit  $n \geq N$ , on a alors :

$$|u_n v_n| = |u_n| \times |v_n| \leq \frac{\varepsilon}{M} \times M \leq \varepsilon.$$

Ainsi  $(u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0. □

### Proposition 7

- Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite minorée et si  $\lim v_n = +\infty$ , alors  $\lim(u_n + v_n) = +\infty$ .
- Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite majorée et si  $\lim v_n = -\infty$ , alors  $\lim(u_n + v_n) = -\infty$ .
- Si  $\lim u_n = +\infty$  et si  $\lim v_n = +\infty$ , alors  $\lim(u_n + v_n) = +\infty$ .
- Si  $\lim u_n = -\infty$  et si  $\lim v_n = -\infty$ , alors  $\lim(u_n + v_n) = -\infty$ .

*Preuve.*

- $(u_n)$  est minorée donc il existe  $m \in \mathbb{R}$  tel que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m.$   
Soit  $A \in \mathbb{R}$ . Comme  $\lim v_n = +\infty$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que :  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies v_n \geq A - m.$   
Soit  $n \geq N$ . On a alors :  $u_n + v_n \geq m + A - m = A.$   
Ainsi,  $\lim(u_n + v_n) = +\infty.$
- $(u_n)$  est majorée donc il existe  $M \in \mathbb{R}$  tel que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M.$   
Soit  $A \in \mathbb{R}$ . Comme  $\lim v_n = -\infty$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que :  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies v_n \leq A - M.$   
Soit  $n \geq N$ . On a alors :  $u_n + v_n \leq M + A - M = A.$   
Ainsi,  $\lim(u_n + v_n) = -\infty.$
- Soit  $A \in \mathbb{R}$ . Comme  $\lim u_n = +\infty$ , il existe  $N_1 \in \mathbb{N}$  tel que :  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_1 \implies u_n \geq \frac{A}{2}$  et, comme  $\lim v_n = +\infty$ , il existe  $N_2 \in \mathbb{N}$  tel que :  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_2 \implies v_n \geq \frac{A}{2}.$   
Posons  $N = \max(N_1, N_2)$ . Soit  $n \geq N$ . On a alors :  $u_n + v_n \geq \frac{A}{2} + \frac{A}{2} = A.$   
Ainsi,  $\lim(u_n + v_n) = +\infty.$
- Soit  $A \in \mathbb{R}$ . Comme  $\lim u_n = -\infty$ , il existe  $N_1 \in \mathbb{N}$  tel que :  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_1 \implies u_n \leq \frac{A}{2}$  et, comme  $\lim v_n = -\infty$ , il existe  $N_2 \in \mathbb{N}$  tel que :  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_2 \implies v_n \leq \frac{A}{2}.$   
Posons  $N = \max(N_1, N_2)$ . Soit  $n \geq N$ . On a alors :  $u_n + v_n \leq \frac{A}{2} + \frac{A}{2} = A.$   
Ainsi,  $\lim(u_n + v_n) = -\infty.$  □

### Proposition 8

- Si  $\lim u_n = l \in \mathbb{R}^{+*}$  et si  $\lim v_n = +\infty$ , alors  $\lim(u_n \cdot v_n) = +\infty.$
- Si  $\lim u_n = l \in \mathbb{R}^{-*}$  et si  $\lim v_n = +\infty$ , alors  $\lim(u_n \cdot v_n) = -\infty.$
- Si  $\lim u_n = l \in \mathbb{R}^{+*}$  et si  $\lim v_n = -\infty$ , alors  $\lim(u_n \cdot v_n) = -\infty.$
- Si  $\lim u_n = l \in \mathbb{R}^{-*}$  et si  $\lim v_n = -\infty$ , alors  $\lim(u_n \cdot v_n) = +\infty.$

Preuve.

- Comme  $\lim u_n = l \in \mathbb{R}^{+*}$  et  $0 < \frac{l}{2} < l$ , il existe  $N_1 \in \mathbb{N}$  tel que :  $\forall n \geq N_1, u_n \geq \frac{l}{2} > 0$ .  
Soit  $A \in \mathbb{R}$ , comme  $\lim v_n = +\infty$ , il existe  $N_2 \in \mathbb{N}$  tel que :  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_2 \implies v_n \geq \frac{2|A|}{l} \geq 0$ .  
Posons  $N = \max(N_1, N_2)$ . Soit  $n \geq N$ . On a alors :  $u_n \cdot v_n \geq \frac{l}{2} \frac{2|A|}{l} = |A| \geq A$ .  
Ainsi,  $\lim(u_n \cdot v_n) = +\infty$ .
- Comme  $\lim u_n = l \in \mathbb{R}^{-*}$  et  $l < \frac{l}{2} < 0$ , il existe  $N_1 \in \mathbb{N}$  tel que :  $\forall n \geq N_1, u_n \leq \frac{l}{2} < 0$ .  
Soit  $A \in \mathbb{R}$ , comme  $\lim v_n = +\infty$ , il existe  $N_2 \in \mathbb{N}$  tel que :  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_2 \implies v_n \geq -\frac{2|A|}{l} \geq 0$ .  
Posons  $N = \max(N_1, N_2)$ . Soit  $n \geq N$ . On a alors :  $(-u_n) \cdot v_n \geq \left(-\frac{l}{2}\right) \left(-\frac{2|A|}{l}\right) = |A| \geq -A$ . Donc  $u_n \cdot v_n \leq A$ .  
Ainsi,  $\lim(u_n \cdot v_n) = -\infty$ .
- Comme  $\lim u_n = l \in \mathbb{R}^{+*}$  et  $0 < \frac{l}{2} < l$ , il existe  $N_1 \in \mathbb{N}$  tel que :  $\forall n \geq N_1, u_n \geq \frac{l}{2} > 0$ .  
Soit  $A \in \mathbb{R}$ , comme  $\lim v_n = -\infty$ , il existe  $N_2 \in \mathbb{N}$  tel que :  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_2 \implies v_n \leq -\frac{2|A|}{l} \leq 0$ .  
Posons  $N = \max(N_1, N_2)$ . Soit  $n \geq N$ . On a alors :  $u_n \cdot (-v_n) \geq \frac{l}{2} \frac{2|A|}{l} = |A| \geq -A$ . Donc  $u_n \cdot v_n \leq A$ .  
Ainsi,  $\lim(u_n \cdot v_n) = -\infty$ .
- Comme  $\lim u_n = l \in \mathbb{R}^{-*}$  et  $l < \frac{l}{2} < 0$ , il existe  $N_1 \in \mathbb{N}$  tel que :  $\forall n \geq N_1, u_n \leq \frac{l}{2} < 0$ .  
Soit  $A \in \mathbb{R}$ , comme  $\lim v_n = -\infty$ , il existe  $N_2 \in \mathbb{N}$  tel que :  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_2 \implies v_n \leq -\frac{2|A|}{l} \leq 0$ .  
Posons  $N = \max(N_1, N_2)$ . Soit  $n \geq N$ . On a alors :  $u_n \cdot v_n = (-u_n) \cdot (-v_n) \geq \left(-\frac{l}{2}\right) \left(-\frac{2|A|}{l}\right) = |A| \geq A$ .  
Ainsi,  $\lim(u_n \cdot v_n) = +\infty$ .

□

### Proposition 9

- Si  $\lim u_n = +\infty$  et si  $\lim v_n = +\infty$ , alors  $\lim(u_n \cdot v_n) = +\infty$ .
- Si  $\lim u_n = +\infty$  et si  $\lim v_n = -\infty$ , alors  $\lim(u_n \cdot v_n) = -\infty$ .
- Si  $\lim u_n = -\infty$  et si  $\lim v_n = -\infty$ , alors  $\lim(u_n \cdot v_n) = +\infty$ .

Preuve.

- Soit  $A \in \mathbb{R}$ , comme  $\lim u_n = +\infty$ , il existe  $N_1 \in \mathbb{N}$  tel que :  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_1 \implies u_n \geq \sqrt{|A|} \geq 0$ .  
Comme  $\lim v_n = +\infty$ , il existe  $N_2 \in \mathbb{N}$  tel que :  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_2 \implies v_n \geq \sqrt{|A|} \geq 0$ .  
Posons  $N = \max(N_1, N_2)$ . Soit  $n \geq N$ . On a alors :  $u_n \cdot v_n \geq \sqrt{|A|} \cdot \sqrt{|A|} = |A| \geq A$ .  
Ainsi,  $\lim(u_n \cdot v_n) = +\infty$ .
- Si  $\lim u_n = +\infty$  et si  $\lim v_n = -\infty$ , alors  $\lim u_n = +\infty$  et  $\lim(-v_n) = +\infty$  donc, d'après le point précédent  $\lim(u_n \cdot (-v_n)) = +\infty$ . Ainsi, d'après la proposition précédente,  $\lim(u_n \cdot v_n) = -\infty$ .
- Si  $\lim u_n = -\infty$  et si  $\lim v_n = -\infty$ , alors  $\lim(-u_n) = +\infty$  et  $\lim(-v_n) = +\infty$  donc, d'après le premier point  $\lim((-u_n) \cdot (-v_n)) = +\infty$ . Ainsi,  $\lim(u_n \cdot v_n) = +\infty$ .

□

### Proposition 10

- Si  $\lim u_n = +\infty$ , alors  $\lim \frac{1}{u_n} = 0$ .
- Si  $\lim u_n = -\infty$ , alors  $\lim \frac{1}{u_n} = 0$ .
- Si  $\lim u_n = 0$  et si :  $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n > 0$ , alors  $\lim \frac{1}{u_n} = +\infty$ .
- Si  $\lim u_n = 0$  et si :  $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n < 0$ , alors  $\lim \frac{1}{u_n} = -\infty$ .

Preuve.

- Soit  $\varepsilon > 0$ . Comme  $\lim u_n = +\infty$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que :  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies u_n \geq \frac{1}{\varepsilon} > 0$ .  
Soit  $n \geq N$ , on a alors :  $\left| \frac{1}{u_n} \right| = \frac{1}{u_n} \leq \varepsilon$ . Donc :  $\lim \frac{1}{u_n} = 0$ .
- Si  $\lim u_n = -\infty$ , alors  $\lim(-u_n) = +\infty$ , donc, d'après le point précédent  $\lim \frac{1}{-u_n} = 0$  ainsi  $\lim \frac{1}{u_n} = 0$ .
- Supposons qu'il existe  $N_1 \in \mathbb{N}$  tel que :  $\forall n \geq N_1, u_n > 0$ .  
Soit  $A \in \mathbb{R}$ . Comme  $\lim u_n = 0$ , il existe  $N_2 \in \mathbb{N}$  tel que :  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_2 \implies |u_n| \leq \frac{1}{|A|+1}$ .  
Posons  $N = \max(N_1, N_2)$ . Soit  $n \geq N$ , on a :  $\frac{1}{u_n} = \frac{1}{|u_n|} \geq |A| + 1 \geq A$ . Donc  $\lim \frac{1}{u_n} = +\infty$ .
- Si  $\lim u_n = 0$  et si :  $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n < 0$ , alors :  $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, -u_n > 0$ , donc, d'après le point précédent  $\lim \frac{1}{-u_n} = +\infty$  ainsi  $\lim \frac{1}{u_n} = -\infty$ .

□

**Remarque :** Si  $\lim u_n = 0$ , on ne peut pas dire que  $\lim \frac{1}{u_n} = \pm\infty$  car la limite peut ne pas exister. Par exemple :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ . On a  $\lim u_n = 0$  mais  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{u_n} = (-1)^n n$  n'a pas de limite.

### Méthode 1

En pratique, pour calculer une limite, on utilise les opérations mais dans le cas où il s'agit d'une forme indéterminée, il faut trouver une autre méthode.

- Si  $\lim u_n = +\infty$  et  $\lim v_n = +\infty$ , pour étudier la convergence de  $(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})$  on peut utiliser la quantité conjuguée c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sqrt{u_n} - \sqrt{v_n} = \frac{u_n - v_n}{\sqrt{u_n} + \sqrt{v_n}},$$

on a  $\lim(\sqrt{u_n} + \sqrt{v_n}) = +\infty$ , il faut alors étudier la convergence de  $(u_n - v_n)$ .

- Si  $\lim u_n = +\infty$  et  $\lim v_n = +\infty$ , pour étudier la convergence de  $(\frac{u_n}{v_n})$ , on peut factoriser  $(u_n)$  et  $(v_n)$  par leur terme dominant.
- Si  $\lim u_n = 1$  et  $\lim v_n = +\infty$ , pour étudier la convergence de  $(u_n^{v_n})$ , on écrit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n^{v_n} = e^{v_n \ln(u_n)}.$$

On se ramène alors à l'étude du produit  $(v_n \ln(u_n))$ .

⇨ **Exemple 4:** Calculer :

- $\lim \frac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n}$

- $\lim \frac{\sin n^4}{n}$

- $\lim \frac{n - (-1)^n}{n + (-1)^n}$

- $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

- $\lim \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}$

- $\lim \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$

⇔ **Exemple 5 :** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite réelle qui converge vers  $l \in \mathbb{R}$ . On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k.$$

Montrer que la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers  $l$ .  
Ce résultat s'appelle le théorème de Césaro.

## 1.4 Passage à la limite dans les inégalités

### Proposition 11

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites convergentes, vers  $l$  et  $l'$ . On a :

$$(\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n) \implies l \leq l'.$$

*Preuve.* Supposons que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$  et  $l > l'$ . Posons  $\varepsilon = \frac{l-l'}{3} > 0$ . Alors : il existe  $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$  tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_1 \implies |u_n - l| \leq \varepsilon \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_2 \implies |v_n - l'| \leq \varepsilon.$$

Posons  $N = \max(N_1, N_2)$ . Soit  $n \geq N$ , on a :  $l - \varepsilon \leq u_n \leq v_n \leq l' + \varepsilon$ .

Or  $l - \varepsilon = l - \frac{l-l'}{3} = \frac{2l+l'}{3}$  et  $l' + \varepsilon = l' + \frac{l-l'}{3} = \frac{l+2l'}{3}$ . Ainsi :

$$\frac{2l+l'}{3} \leq \frac{l+2l'}{3}.$$

Donc  $2l+l' \leq l+2l'$  et ainsi  $l \leq l'$  ce qui est absurde. Donc :

$$l \leq l'.$$

□

**Remarque :** Les inégalités strictes ne sont pas conservées par passage à la limite. Par exemple, pour :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 1 - \frac{1}{n}$ ,  $v_n = 1 + \frac{1}{n}$ , on a :  $\forall n \in \mathbb{N}^* u_n < v_n$  mais  $\lim u_n = \lim v_n = 1$ .

## 1.5 Existence de limite et inégalités

### Théorème 1 : Théorème d'encadrement

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  trois suites vérifiant :

- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n \leq w_n$
- Les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergent vers la même limite  $l \in \mathbb{R}$ .

Alors  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l$ .

*Preuve.* Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$  tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_1 \implies |u_n - l| \leq \varepsilon \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_2 \implies |w_n - l| \leq \varepsilon.$$

Posons  $N = \max(N_1, N_2)$ . Soit  $n \geq N$ , on a :

$$-\varepsilon \leq u_n - l \leq v_n - l \leq w_n - l \leq \varepsilon.$$

Donc :

$$|v_n - l| \leq \varepsilon.$$

Ainsi  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l$ .

□

### Corollaire 2

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  des suites réelles, soit  $l \in \mathbb{R}$ . On suppose que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - l| \leq v_n \text{ et } \lim v_n = 0.$$

Alors :

$$\lim u_n = l.$$

*Preuve.* On a :  $\forall n \in \mathbb{N}, -v_n \leq u_n - l \leq v_n$  et  $\lim(v_n) = \lim(-v_n) = 0$ . Donc, par théorème d'encadrement,  $\lim(u_n - l) = 0$ . Ainsi :

$$\lim u_n = l.$$

□

### Théorème 2

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites réelles.

1. Si  $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \end{cases}$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ .
2. Si  $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty \end{cases}$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ .

*Preuve.* 1. Supposons  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

Soit  $A \in \mathbb{R}$ . Il existe  $N \in \mathbb{N}$ , tel que :  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies u_n \geq A$ .

Soit  $n \geq N$ , on a :  $v_n \geq u_n \geq A$ .

Donc :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ .

2. Supposons  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ .

Alors :  $\forall n \in \mathbb{N}, (-v_n) \leq (-u_n)$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-v_n) = +\infty$ .

Donc, d'après le premier point :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-u_n) = +\infty$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ .

□

⇔ **Exemple 6 :** Calculer :

- $\lim \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{\sqrt{n}}$

- $\lim u_n$  avec :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k}$

## II Suites monotones

### 2.1 Borne supérieure, borne inférieure

#### Définition 3

Soit  $A$  une partie de  $\mathbb{R}$ .

- Si  $A$  est majorée, soit  $F$  l'ensemble des majorants de  $A$ . Si  $F$  admet un minimum, alors ce minimum est appelé **borne supérieure de  $A$**  et est noté  $\sup(A)$ .
- Si  $A$  est minorée, soit  $G$  l'ensemble des minorants de  $A$ . Si  $G$  admet un maximum, alors ce maximum est appelé **borne inférieure de  $A$**  et est noté  $\inf(A)$ .

Par convention :

- Si  $A$  n'est pas majorée, on pose  $\sup(A) = +\infty$ .
- Si  $A$  n'est pas minorée, on pose  $\inf(A) = -\infty$ .

#### Proposition 12

Soit  $A$  une partie de  $\mathbb{R}$ .

- Si  $A$  admet un maximum, alors  $A$  admet une borne supérieure et on a :  $\max(A) = \sup(A)$ .
- Si  $A$  admet un minimum, alors  $A$  admet une borne inférieure et on a :  $\min(A) = \inf(A)$ .

#### Théorème 3

Toute partie non vide et majorée de  $\mathbb{R}$  admet une borne supérieure.

Toute partie non vide et minorée de  $\mathbb{R}$  admet une borne inférieure.

**Remarque :** Toute partie non vide de  $\mathbb{R}$  admet une borne supérieure et une borne inférieure dans  $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ .

⇨ **Exemple 7 :** Déterminer, si elles existent, les bornes supérieure et inférieure des ensembles suivants :

1.  $A = \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$ ,
2.  $B = \left\{ \frac{n - \frac{1}{n}}{n + \frac{1}{n}}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$ .

⇨ **Exemple 8 :** Soient  $A$  et  $B$  deux parties non vides et bornées de  $\mathbb{R}$ , soit  $a \in \mathbb{R}$ . On note :

$$-A = \{-x, x \in A\},$$

$$A + B = \{x + y, x \in A, y \in B\},$$

1. Montrer que  $\sup(-A) = -\inf(A)$ .
2. Montrer que  $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$ .

### 2.2 Théorème de la limite monotone

#### Théorème 4 : Théorème de la limite monotone

- Toute suite croissante et majorée de réels converge.
- Toute suite décroissante et minorée de réels converge.

#### Proposition 13

- Toute suite croissante et non majorée de réels diverge vers  $+\infty$ .
- Toute suite décroissante et non minorée de réels diverge vers  $-\infty$ .

**Remarque :** Une suite non majorée ne diverge pas nécessairement vers  $+\infty$ . Ex :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n \cdot n$ .

⇨ **Exemple 9 :** On pose :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \prod_{k=1}^n (1 + e^{-k})$ . Montrons que  $(u_n)$  converge.

**Proposition 14**

Soit  $q \in \mathbb{R}$ , posons :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = q^n$ .

- Si  $|q| < 1$ , alors  $\lim u_n = 0$ .
- Si  $q = 1$ , alors  $\lim u_n = 1$ .
- Si  $q > 1$ , alors  $\lim u_n = +\infty$ .
- Si  $q \leq -1$ ,  $(u_n)$  n'a pas de limite.

**2.3 Suites récurrentes d'ordre 1****Définition 4**

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . On dit que  $I$  est un intervalle stable par  $f$  ssi  $f(I) \subset I$ , c'est-à-dire :

$$\forall x \in I, f(x) \in I.$$

**Proposition 15**

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . On suppose que  $I$  est stable par  $f$ . Alors la suite :

$$u_0 \in I, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

est bien définie et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I.$$

**Proposition 16**

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . On considère la suite définie par :

$$u_0 \in I, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

On suppose que  $(u_n)$  converge vers  $l \in I$  et que  $f$  est continue en  $l$ . Alors :

$$l = f(l).$$

### Méthode 2

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . On suppose que  $I$  est stable par  $f$ .

On considère la suite définie par :

$$u_0 \in I, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

- Comme  $I$  est stable par  $f$  alors  $(u_n)$  est bien définie et est à valeurs dans  $I$ .
  - Pour étudier la monotonie de  $(u_n)$ , on peut :
    - Etudier le signe de  $g : x \mapsto f(x) - x$ .  
En effet, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $g(u_n) = f(u_n) - u_n = u_{n+1} - u_n$ . Donc la monotonie de  $(u_n)$  se déduit du signe de  $g$ .
    - Si  $f$  est croissante, on montre par récurrence que  $(u_n)$  est monotone. Plus précisément :
      - \* Si  $u_0 \leq u_1$ , alors  $(u_n)$  est croissante,
      - \* Si  $u_0 \geq u_1$ , alors  $(u_n)$  est décroissante.
- Il faut donc connaître le signe de  $u_1 - u_0$  :
- \* Si  $u_0$  est donné de façon explicite, on calcule  $u_1$  et on en déduit le signe de  $u_1 - u_0$ .
  - \* Sinon, on étudie le signe de  $g : x \mapsto f(x) - x$ , et on utilise  $u_1 - u_0 = g(u_0)$ .

On sait donc que  $(u_n)$  est monotone.

- Pour étudier la convergence de  $(u_n)$ .
  - Si  $I$  est borné, comme  $(u_n)$  est à valeurs dans  $I$ , alors  $(u_n)$  est bornée. Et comme  $(u_n)$  est monotone,  $(u_n)$  est convergente.
  - Si  $I$  n'est pas borné.
    - \* On regarde si on ne peut pas trouver un autre intervalle stable qui soit borné.
    - \* Sinon, on raisonne par l'absurde et on suppose que  $(u_n)$  est convergente. On applique alors la suite de la méthode en espérant obtenir une contradiction.

On sait donc que  $(u_n)$  converge. Posons  $l = \lim u_n$ .

- Si  $f$  est continue sur  $I$  et  $l \in I$ , alors, comme :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ , on a, par passage à la limite :  $f(l) = l$ . On résout donc l'équation  $f(l) = l$ . Si l'équation admet plusieurs solutions dans  $I$ , on utilise la monotonie de  $(u_n)$  pour trouver la valeur de la limite.

⇔ **Exemple 10** : Etudier la convergence des suites définies par :

1.  $u_0 = \frac{3}{2}$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2} \left( u_n + \frac{2}{u_n} \right)$ .
2.  $u_0 = \frac{1}{2}$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2}{\pi} \text{Arcsin}(u_n)$ .
3.  $u_0 \in \mathbb{R}$ , et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n \cdot e^{-u_n}$ .

## 2.4 Théorème des suites adjacentes

### Définition 5

On dit que deux suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont adjacentes si :

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  croissante
- $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  décroissante
- $(v_n - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0.

### Proposition 17

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  des suites adjacentes avec  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  croissante et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  décroissante. Alors :

$$\forall n, p \in \mathbb{N}, u_n \leq v_p.$$

### Théorème 5

Deux suites adjacentes sont convergentes et ont la même limite.

⇔ **Exemple 11** : Montrer que les suites suivantes sont adjacentes :

$$u_0 = 0, v_0 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$$

## 2.5 Approximations décimales d'un réel

### Proposition 18

Soit  $x \in \mathbb{R}$ , posons :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \text{ et } b_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}.$$

Alors, les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont des suites adjacentes et :

$$\lim a_n = \lim b_n = x.$$

**Remarque :** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n$  et  $b_n$  sont des nombres décimaux et  $a_n \leq x \leq b_n$  et, de plus,  $b_n - a_n = 10^{-n}$ .

On dit que  $a_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$  est une approximation décimale de  $x$  à  $10^{-n}$  près par défaut et que  $b_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$  est une approximation décimale de  $x$  à  $10^{-n}$  près par excès.

### Corollaire 3

Tout réel est limite d'une suite de rationnels.

## III Suites extraites

### 3.1 Définition

#### Définition 6

On appelle suite extraite de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ( ou encore sous-suite de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ) toute suite de la forme  $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  avec  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante.

**Remarque :**  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  sont des suites extraites de  $(u_n)$ .

### 3.2 Limite

#### Théorème 6

Si une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  possède une limite  $l$  (finie ou infinie), alors toutes ses suites extraites convergent la même limite  $l$ .

#### Corollaire 4

Soit  $(u_n)$  une suite de nombres réels.

- Si  $(u_n)$  admet une suite extraite divergente, alors  $(u_n)$  diverge.
- Si  $(u_n)$  admet deux suites extraites convergeant vers des limites distinctes, alors  $(u_n)$  n'a pas de limite.

- ⇔ **Exemple 12 :**
- $((-1)^n)$  n'a pas de limite.
  - $(u_n) = (\sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor)$  n'a pas de limite.

#### Proposition 19

Soit  $(u_n)$  une suite de nombres réels. Si les suites extraites  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  possèdent une même limite  $l$  (finie ou infinie) alors  $(u_n)$  converge vers  $l$ .

⇔ **Exemple 13 :** Etudier la convergence de la suite définie par :

$$u_0 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2}{1 + u_n}.$$

## IV Suites complexes

### 4.1 Convergence

#### Définition 7

Soit  $(z_n)$  une suite complexe

- La partie réelle de la suite  $(z_n)$  est la suite réelle  $(x_n)$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n = \operatorname{Re}(z_n).$$

- La partie imaginaire de la suite  $(z_n)$  est la suite réelle  $(y_n)$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, y_n = \operatorname{Im}(z_n).$$

#### Définition 8

- On dit qu'une suite complexe  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $l \in \mathbb{C}$  ssi :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies |u_n - l| \leq \varepsilon.$$

- On dit qu'une suite complexe  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge ssi il existe un réel  $l \in \mathbb{C}$  tel que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $l$ .

#### Proposition 20

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite complexe et  $l \in \mathbb{C}$ .

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $l$  si et seulement si  $(\operatorname{Re}(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\operatorname{Im}(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$  convergent respectivement vers  $\operatorname{Re}(l)$  et  $\operatorname{Im}(l)$ .

### 4.2 Suites bornées

#### Définition 9

On dit qu'une suite complexe  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée ssi :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M.$$

#### Proposition 21

Toute suite complexe convergente est bornée.

### 4.3 Opérations sur les suites complexes

#### Proposition 22

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites complexes qui convergent respectivement vers  $l \in \mathbb{C}$  et  $l' \in \mathbb{C}$ .

- Pour tout  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ ,  $(\lambda u_n + \mu v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\lambda l + \mu l'$ .
- $(u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $ll'$ .
- Si  $(u_n)$  converge vers  $l \in \mathbb{C}$  et  $(v_n)$  converge vers  $l' \in \mathbb{C}^*$ ,  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  est définie à partir d'un certain rang et converge vers  $\frac{l}{l'}$ .

## 4.4 Suites géométriques

### Proposition 23

Soit  $q \in \mathbb{C}$ , posons :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = q^n$ .

- Si  $|q| < 1$ , alors  $\lim u_n = 0$ .
- Si  $q = 1$ , alors  $\lim u_n = 1$ .
- Si  $q \in \mathbb{R}$  et  $q > 1$ , alors  $\lim u_n = +\infty$ .
- Sinon,  $(u_n)$  n'a pas de limite.

⇨ **Exemple 14:** On pose :

$$z_0 \in \mathbb{C} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{1}{3}(2z_n - \overline{z_n}).$$

Etudier la convergence de  $(z_n)$ .

**En résumé :**

<b>Ce qui reste valable :</b>	<b>Ce qui n'est plus valable :</b>
Unicité de la limite	Monotonie
Une suite convergente est bornée	Majorant/minorant
Opérations sur les limites	Limites infinies
Résultats sur les suites extraites	Passage à la limite dans les inégalités larges
Résultats sur les suites arithmétiques	Théorème de convergence par encadrement
Résultats sur les suites géométriques	Théorèmes de divergence par minoration/majoration
Résultats sur les suites arithmético-géométriques	Théorème de la limite monotone
Résultats sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2	Suites adjacentes