Indications :
vacances de printemps

Problème 1 : Étude d'un endomorphisme défini par une intégrale

1. Stabilité par combinaisons linéaires.
2. Dériver $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \int_x^{x+T} f(t)\,dt$.
3. Utiliser, par exemple, $f : x \mapsto x$ pour montrer que la réciproque est fausse.
4. (a)
   (b)
   (c) Intégration par parties.
   (d) Relation de Chasles dans le cas où $0 < x < 1$.
5. (a) Utiliser F une primitive de f.
   (b)
6. (a) Calculer $U(X^k)(x)$ en utilisant la formule du binôme de Newton.
   (b) Utiliser la linéarité de U et la question précédente.
   (c) Etudier l'image de la base canonique par U_n.
7. (a) (i) Prendre $x = 1$.
   (ii) Remarquer que $U(f)' = 0$.
   (b) Appliquer 2. à $a = x - 1$ et $T = 1$.
   (c) Utiliser la question précédente.
   (d) Remarquer que $\ker(U) \neq \{0\}$.
8. Remarquer que $\mathrm{Im}\,(U) \subset \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Problème 2 : Formule de quadrature

1. (a) Calculer $I_0(P)$ pour $P \in \mathbb{R}_0[X]$ et $I_0(X)$.
   (b) Calculer $I_0(P)$ pour $P \in \mathbb{R}_1[X]$ et $I_0(X^2)$.
   (c) Calculer $I_2(P)$ pour $P \in \mathbb{R}_2[X]$ puis se ramener à un système.
   Pour l'ordre de la formule, calculer $I_2(X^3)$ puis $I_2(P)$ pour $P \in \mathbb{R}_3[X]$ et enfin $I_2(X^4)$.
2. (a) Montrer que φ est injective avec un argument sur les polynômes et conclure avec les dimensions.
   (b) Traduire les conditions demandées en utilisant φ.
   (c) Utiliser l'image d'une base par un isomorphisme.
   (d) Remarquer que la formule est exacte ssi elle est exacte pour les vecteurs d'une base.
   (e) On connaît les racines et le coefficient dominant des polynômes recherchés.
3. (a) Appliquer le résultat à $Q = P((d - x)X + c)$.
   (b) i. Exprimer Φ en fonction de f et de F, une primitive de f. Attention à ne pas oublier de termes composés dans les calculs de dérivées.
   ii. Combiner le théorème des bornes atteintes et l'inégalité des accroissements finis.
   iii. Intégrer l'inégalité précédente.
   iv. Intégrer encore deux fois.
   (c) Appliquer la question précédente à $c_i = a + i\,\frac{b-a}{n}$ et $d_i = a + (i+1)\,\frac{b-a}{n}$ puis sommer les inégalités.

Problème 3 : Endomorphismes vérifiant une équation fonctionnelle

1. (a)
   (b) Commencer par chercher une famille génératrice.
   (c) Calculer $\varphi \circ \varphi(x, y, z, t)$.
   (d) Calculer $f \circ f$.
2. (a) i.
   ii. Utiliser la relation précédente.
   (b) i. Déduire de la question précédente une inégalité sur les dimensions et utiliser le théorème du rang.
   ii. Etudier $\ker g \cap \ker h$.
   iii. Montrer que : $\dim(\ker g \oplus \ker h) \geq \dim E$.
   (c) i. Montrer l'égalité des applications linéaires sur des espaces supplémentaires.
   ii. Remarquer que : $\operatorname{Im} q = \ker h = \ker p$.
   iii. Utiliser la formule du binôme de Newton en remarquant que : $f = 2p - q$.