Programme de révisions :
vacances de printemps

Légende :

Pas de problème supplémentaire, uniquement le DM.

Un problème de révision (intégration, polynômes et applications linéaires) en plus du DM.

Trois problèmes en plus du DM.

Séance 1 :

Déterminer une primitive de :

$$x \longmapsto x(\mathrm{Arctan}\,x)^2.$$

On pourra effectuer des intégrations par parties.

Solution : $x \longmapsto \frac{x^2+1}{2}(\mathrm{Arctan}\,x)^2 - x\mathrm{Arctan}\,x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$

- ☐ Relire rapidement le chapitre 17.
- ☐ Savoir montrer que deux espaces sont supplémentaires.
  - ∗ exemple 3 du chapitre 17,
  - ∗ exemple 11 du chapitre 17.
- ☐ Savoir déterminer une base et/ou la dimension d'un espace vectoriel.
  - ∗ exemple 7 du chapitre 17,
  - ∗ exemple 8 du chapitre 17.
- ☐ Savoir montrer qu'une famille est libre.
  - ∗ exemple 5 du chapitre 17,
  - ∗ exercice 14 du chapitre 17.

DM11, problème 1 question 1.

DM11, problème 1 questions 1 et 2.

DM11, problème 1.

Séance 2 :

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{+*})$. Montrer que $g : x \mapsto f\left(\frac{1}{x}\right)$ est convexe ssi $h : x \mapsto x f(x)$ est convexe.

Solution : $g''(x) = \frac{1}{x^3} h''\left(\frac{1}{x}\right)$

- ☐ Relire le chapitre 19.
- ☐ Savoir calculer le rang d'une application linéaire.
  - ∗ exemple 4 du chapitre 19.
- ☐ Savoir manipuler les projections.
  - ∗ exemple 5 du chapitre 19,
  - ∗ exemple 6 du chapitre 19,
  - ∗ exemple 7 du chapitre 19.
- ☐ Savoir utiliser le théorème du rang.
  - ∗ exemple 12 du chapitre 19.

DM11, problème 1 question 2.

DM11, problème 1 question 3.

DM11, problème 2 et Problème 1 questions 1 à 4.

Séance 3 :

Déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de :

$$x \mapsto (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}.$$

Solution : $e\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{7}{24}x^2\right) + o(x^2)$.

- ☐ Relire le chapitre 19.
- ☐ Savoir manipuler les isomorphismes.
  - ∗ exercice 17 du chapitre 19,
  - ∗ exercice 18 du chapitre 19,
- ☐ Savoir manipuler les hyperplans.
  - ∗ exemple 13 du chapitre 19,
  - ∗ exercice 25 du chapitre 19,
- ☐ Préparer l'exercice 22 du chapitre 19 pour le TD de lundi.

DM11, problème 1 questions 3.a et b.

DM11, problème 2.

Problème 1 questions 5 à 8.

Séance 4 :

Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' + y' + \frac{1}{2}y = \sin x.$$

Solution : $x \mapsto e^{-\frac{x}{2}}\left(\lambda \cos\frac{x}{2} + \mu \sin\frac{x}{2}\right) - \frac{4}{5}\cos x - \frac{2}{5}\sin x$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

- ☐ Relire le chapitre 20.
- ☐ Préparer l'exercice 27 du chapitre 19 pour le TD de lundi.
- ☐ Savoir écrire la matrice d'une application linéaire.
  - exemple 2 du chapitre 20.
- ☐ Savoir lire la matrice d'une application linéaire.
  - exemple 3 du chapitre 20,
  - exemple 4 du chapitre 20.
- ☐ Savoir manipuler le noyau et l'image d'une matrice.
  - exemple 7 du chapitre 20.
- ☐ Savoir utiliser les matrices pour faire une preuve d'isomorphisme.
  - exemple 5 du chapitre 20,
  - exercice 6 du chapitre 20.

DM11 questions 3.c à 3.g.

Problème 1, questions 1 à 4.

Problème 2 : questions 1 et 2.

Séance 5 :

Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^6 + (7-i)z^3 - 8 - 8i = 0.$$

On donnera les solutions sous forme trigonométrique.

Solution : $\{-2, 2e^{i\pi/3}, 2e^{5i\pi/3}, \sqrt[6]{2}e^{i\pi/12}, \sqrt[6]{2}e^{3i\pi/4}, \sqrt[6]{2}e^{17i\pi/12}\}$

- ☐ Relire le chapitre 18 à partir de II.2 (inutile de relire le début)
- ☐ Savoir calculer une limite faisant apparaître une intégrale. Refaire :
  - exemple 1 du chapitre 18,
  - exemple 2 du chapitre 18,
  - exemple 3 du chapitre 18,
  - exemple 4 du chapitre 18.
- ☐ Savoir calculer des limites de sommes de Riemann. Refaire :
  - exemple 8 du chapitre 18,
  - exemple 9 du chapitre 18.
- ☐ Préparer l'exercice 3 du chapitre 20 pour le TD de lundi.

DM11, problème 2 questions 1 et 2.a.

Problème 1, questions 5 et 6.

Problème 2 : question 3.

Séance 6 :

Soit $n \geq 3$. Calculer :

$$\sum_{k=0}^{n} \left\lfloor \frac{4k}{k^2+1} \right\rfloor .$$

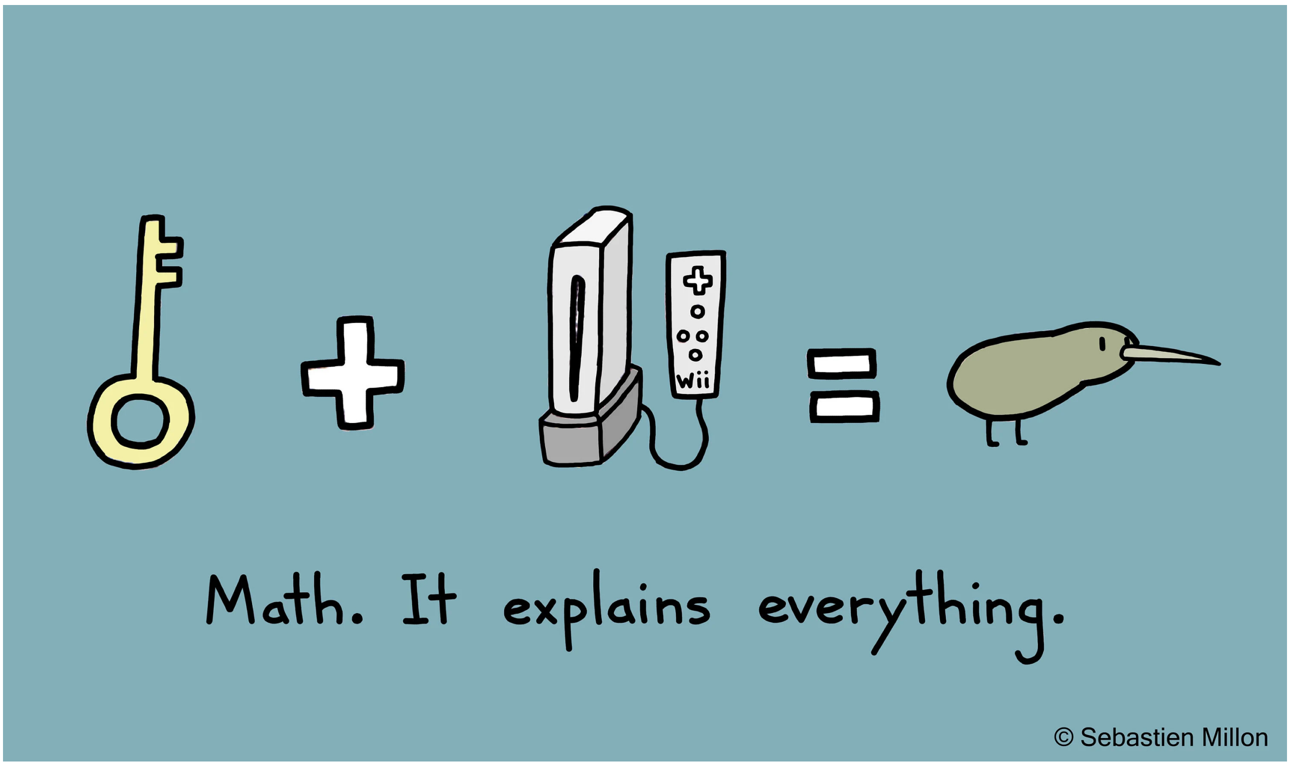
Solution : 4

- ☐ Relire le chapitre 18 à partir de II.2 (inutile de relire le début)
- ☐ Savoir calculer une dérivée faisant apparaître une intégrale.
  Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, calculer la dérivée de :
  - $g_1 : x \longmapsto \int_x^e f(t)\,dt$,
  - $g_2 : x \longmapsto \int_0^x f(t)e^t\,dt$,
  - $g_3 : x \longmapsto \int_{-x}^x f(t)\,dt$,
  - $g_4 : x \longmapsto \int_{\sqrt[3]{x}}^{x^3} f(t)t^3\,dt$,
  - $g_5 : x \longmapsto \int_1^x f(t)x\,dt$,
  - $g_6 : x \longmapsto \int_1^x f(t)(x-t)^2\,dt$.
- ☐ Savoir utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange. Refaire :
  - exemple 12 du chapitre 18,
  - exemple 13 du chapitre 18.
- ☐ Préparer l'exercice 7 du chapitre 20 pour le TD de lundi.

DM11, problème 2 questions 2.b et 2.c.

Problème 1, questions 7 et 8.

Problème 3.



Problème 1 : Étude d'un endomorphisme défini par une intégrale

Dans tout le problème, on identifie $\mathbb{R}[X]$ à l'ensemble des fonctions polynomiales.
On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que $\mathcal{E} = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel.
2. Soit $f \in \mathcal{E}$, T−périodique. Montrer que :
$$\forall a \in \mathbb{R}, \int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt.$$
3. On suppose de plus dans cette question que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Démontrer que si f est T− périodique, il en est de même pour f'.
Montrer que la réciproque est fausse.

Pour tout élément f de $\mathcal{E}$, on note $U(f)$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, U(f)(x) = \int_{x-1}^{x} f(t)\,dt.$$

4. Déterminer $U(f)$ dans les cas particuliers suivants :
   (a) f est constante,
   (b) $f : x \mapsto e^x$,
   (c) $f : x \mapsto xe^x$,
   (d) $f : x \mapsto |x|$. On pourra faire trois cas : $x \leq 0$, $x \geq 1$ et $0 < x < 1$.
5. (a) Montrer que la fonction $U(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
   (b) Montrer que l'application U qui à $f \in \mathcal{E}$ associe $U(f)$ est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.
6. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ et $\mathcal{B}_n = (1, X, \ldots, X^n)$ sa base canonique.
   (a) Soit $k \in [\![0, n]\!]$, montrer que $U(X^k)$ est un polynôme de degré k.
   (b) Montrer que : $\forall P \in E_n$, $U(P) \in E_n$.
   On définit alors l'endomorphisme U_n par :
$$U_n : \begin{array}{ccc} E_n & \to & E_n \\ P & \mapsto & U(P) \end{array}$$
   (c) Montrer que $U_n \in GL(E_n)$.
7. (a) Justifier que si f, élément de $\mathcal{E}$, est dans $\mathrm{Ker}\,(U)$, alors :
      (i) $\int_0^1 f(t)\,dt = 0$
      (ii) f est périodique de période 1.
   (b) Montrer que $\mathrm{Ker}\,(U) = \left\{ f \in \mathcal{E}, \text{ périodique de période 1 et telle que } \int_0^1 f(t)\,dt = 0 \right\}$.
   (c) On pose $f : x \mapsto \cos(2\pi x)$. Montrer que $f \in \mathrm{Ker}\,(U)$.
   (d) L'endomorphisme U est-il injectif ?
8. L'endomorphisme U est-il surjectif ?

Problème 2 : Formule de quadrature

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et soit w est une fonction continue et strictement positive de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On dit que w est *un poids* sur $[a, b]$.
Etant donné une fonction continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, on cherche à approcher l'intégrale $\int_a^b f(x)w(x)dx$ par une expression de la forme

$$I_n(f) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j f(x_j),$$

où $n \in \mathbb{N}$, $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ sont $n+1$ points distincts dans $[a, b]$.
Une telle expression $I_n(f)$ est appelée *formule de quadrature* et on note

$$e(f) = \int_a^b f(x)w(x)dx - \sum_{j=0}^{n} \lambda_j f(x_j)$$

l'*erreur de quadrature* associée.
Etant donné un entier $m \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_m[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à m. On dit qu'une formule de quadrature $I_n(f)$ est *exacte sur* $\mathbb{R}_m[X]$ si,

$$\forall P \in \mathbb{R}_m[X], \quad e(P) = 0,$$

ce qui signifie que, pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à m,

$$\int_a^b P(x)w(x)dx = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j P(x_j).$$

Enfin, on appelle *ordre d'une formule de quadrature* $I_n(f)$ le plus grand entier $m \in \mathbb{N}$ pour lequel la formule de quadrature $I_n(f)$ est exacte sur $\mathbb{R}_m[X]$.

1. *Exemples élémentaires*
   On se place dans le cas $a = 0$, $b = 1$ et $\forall x \in [0, 1]$, $w(x) = 1$. On cherche donc à approcher $\int_0^1 f(x)dx$ lorsque f est une fonction continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.
   (a) Déterminer l'ordre de la formule de quadrature $I_0(f) = f(0)$ et représenter graphiquement l'erreur associée $e(f)$.
   (b) Faire de même avec la formule de quadrature $I_0(f) = f(1/2)$.
   (c) Déterminer les coefficients $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ pour que la formule $I_2(f) = \lambda_0 f(0) + \lambda_1 f(1/2) + \lambda_2 f(1)$ soit exacte sur $\mathbb{R}_2[X]$. Cette formule de quadrature est-elle d'ordre 2 ?
2. *Construction de formules d'ordre quelconque*
   On revient au cas général.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère $n+1$ points distincts dans $I[a, b]$, notés $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$, et une fonction continue f de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que l'application $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto & (P(x_0), P(x_1), \dots, P(x_n)) \end{array} \right.$ est un isomorphisme.
   (b) Montrer que, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$\forall j \in [\![0, n]\!], \quad L_i(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i, \\ 1 & \text{si } j = i. \end{cases}$$

   (c) Montrer que $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
   Cette base est appelée *base de Lagrange associée aux points* $(x_0, \dots, x_n)$.
   (d) Montrer que la formule de quadrature $I_n(f) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j f(x_j)$ est exacte sur $\mathbb{R}_n[X]$ si, et seulement si,

$$\forall j \in [\![0, n]\!], \quad \lambda_j = \int_a^b L_j(x)w(x)dx.$$

   (e) On se place dans le cas $I = [0, 1]$ et $\forall x \in I$, $w(x) = 1$. Déterminer la base de Lagrange associée aux points $(0, 1/2, 1)$ et retrouver ainsi les coefficients de la formule de quadrature $I_2(f)$ de la question **??**.

3. *Evaluation de l'erreur dans un cas particulier*
On se place dans le cas $\forall x \in [a,b],\ w(x) = 1$.
Les questions **??** et **??** montrent que :

$$\forall Q \in \mathbb{R}_2[X],\ \int_0^1 Q(x)\,dx = \frac{1}{6}\left(Q(0) + Q(1) + 4Q(1/2)\right).$$

On considère que $f \in \mathcal{C}^3([a,b])$. Soient $c, d \in [a,b]$ tels que $c < d$.

(a) En utilisant le changement de variable $y = (d-c)x + c$, montrer que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ \int_c^d P(y)\,dy = \frac{d-c}{6}\left(P(c) + P(d) + 4P\left(\frac{c+d}{2}\right)\right).$$

(b) On pose :

$$\begin{array}{rccl} \Phi: & [0, d-c] & \to & \mathbb{R} \\ & h & \mapsto & \int_c^{c+h} f(y)\,dy - \frac{h}{6}\left(f(c) + f(c+h) + 4f\left(c + \frac{h}{2}\right)\right). \end{array}$$

i. Montrer que Φ est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $[0, d-c]$ et calculer Φ', Φ'' et Φ'''.

ii. Montrer qu'il existe une constante M, indépendante de c et d telle que :

$$\forall h \in [0, d-c],\ |\Phi'''(h)| \leq Mh.$$

iii. En déduire que :

$$\forall h \in [0, d-c],\ |\Phi''(h)| \leq \frac{M}{2}h^2.$$

iv. En procédant de même, établir que :

$$\left|\int_c^d f(y)\,dy - \frac{(d-c)}{6}\left(f(c) + f(d) + 4f\left(\frac{c+d}{2}\right)\right)\right| \leq \frac{M}{24}(d-c)^4.$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$\forall i \in [\![0, n-1]\!],\ f_i = f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) + f\left(a + (i+1)\frac{b-a}{n}\right) + 4f\left(a + (i+1/2)\frac{b-a}{n}\right).$$

Montrer qu'il existe une constante M, indépendante de n telle que :

$$\left|\int_a^b f(y)\,dy - \frac{b-a}{6n}\sum_{i=0}^{n-1} f_i\right| \leq \frac{M}{24n^3}(b-a)^4.$$

Problème 3 : Endomorphismes vérifiant une équation fonctionnelle

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On s'intéresse à la relation suivante :

$$f \circ f = f + 2Id_E \quad (*).$$

1. Dans cette question, on étudie un cas particulier.
   On pose :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z,t) & \mapsto & (2x-z+t, -2x+z-t, -y+t, -2x-y+z) \end{array}$$

   (a) Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$.
   (b) Déterminer une base de $\ker \varphi$ et une base de $\operatorname{Im} \varphi$.
   (c) Calculer $\varphi \circ \varphi$. Que peut-on en déduire ?
   (d) On pose $f = 3\varphi - Id_E$. Montrer que f vérifie $(*)$.

2. On revient maintenant au cas général.
   Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $(*)$. On pose :

$$g = f - 2Id_E \text{ et } h = f + Id_E.$$

   (a) i. Montrer que $g \circ h = h \circ g = 0$.
       ii. En déduire que $\operatorname{Im} h \subset \ker g$ et $\operatorname{Im} g \subset \ker h$.
   (b) i. Montrer que $\dim(\ker g) + \dim(\ker h) \geq n$.
       ii. Montrer que $\ker g$ et $\ker h$ sont en somme directe.
       iii. Montrer que :

$$E = \ker g \oplus \ker h.$$

   (c) Soit p la projection sur $\ker g$ parallèlement à $\ker h$, soit q la projection sur $\ker h$ parallèlement à $\ker g$.
       i. Montrer que $h = 3p$ et que $g = -3q$.
       ii. Montrer que $p \circ q = q \circ p = 0$.
       iii. Montrer que, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$,

$$f^m = 2^m p + (-1)^m q.$$