
Coorection des révisions

PCSI1

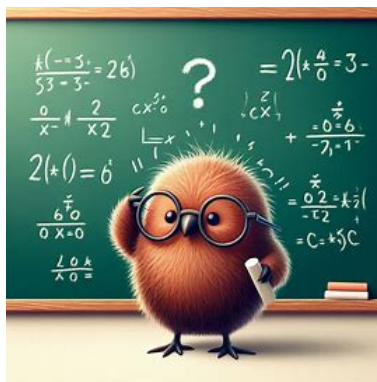
Mathématiques

Lycée Saint-Louis
2024-2025



Table des matières

1	Classiques en algèbre linéaire	2
2	Polynômes de Lagrange	6
3	Suites récurrentes	11
4	Dénombrement et probabilités	16
5	Théorème de Césaro	20
6	Polynômes de Tchebychev	24
7	Equations fonctionnelles	29
8	Déterminants	37
9	Limites d'intégrales	43
10	Probabilités, espérance et variance	46
11	Compléments sur les séries numériques	51
12	Deux thèmes : la trace et une somme de série classique	57
13	Difficiles en algèbre linéaire	63
14	Problèmes : Déterminants et séries	68
15	Problème : Probabilités et matrices	73
16	Problème complet d'algèbre	76
17	Jeux	85



Classiques en algèbre linéaire



Exercice de calcul (Chapitre 16, exemple 5)

1.

$$\begin{aligned}\cos(x) \cdot \operatorname{ch}(x) &= \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + o(x^4) \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \\ &= 1 - \frac{x^4}{6} + o(x^4)\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} \ln(1+x) &= \left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2\right) \left(x - \frac{x^2}{2}\right) + o(x^2) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\ &= x + o(x^2)\end{aligned}$$



Inégalité

Soit $(x, t) \in (\mathbb{R}^+)^2$, on a :

$$|f(x, t)| \leq \frac{1}{1+t^2}.$$

Posons $g : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ alors g est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $g(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$ donc g convient.



Exercice 1 (Chapitre 19, exemple 2)

- Soient $x, y \in E \setminus \{0\}$.

- Si (x, y) est libre. On a : $\lambda_{x+y}(x+y) = f(x+y) = f(x) + f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$,

Donc :

$$(\lambda_{x+y} - \lambda_x)x + (\lambda_{x+y} - \lambda_y)y = 0.$$

Comme la famille (x, y) est libre, on obtient : $\lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y$.

- Si (x, y) est liée.

Il existe $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $y = \mu x$ (car $x \neq 0_E$).

Alors $\lambda_y y = f(y) = f(\mu x) = \mu f(x) = \mu \lambda_x x = \lambda_x y$. D'où $(\lambda_y - \lambda_x)y = 0$ et comme $y \neq 0_E$, $\lambda_y - \lambda_x = 0$ puis $\lambda_x = \lambda_y$.

Dans tous les cas $\lambda_x = \lambda_y$.

Donc : $\forall x, y \in E \setminus \{0\}$, $\lambda_x = \lambda_y$.

Ainsi, il existe λ tel que : $\forall x \in E \setminus \{0\}$, $f(x) = \lambda x$.

- De plus $f(0_E) = 0_E = \lambda 0_E$.

Donc : $\forall x \in E$, $f(x) = \lambda x$ et f est une homothétie.



Exercice 2 (Chapitre 12, exercice 4)

Analyse : Supposons qu'il existe M telle que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $AM = MA$.

Alors, en particulier, pour tout $r, s \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $ME_{rs} = E_{rs}M$.

Soient $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

$$(ME_{rs})_{ij} = \sum_{k=1}^n m_{i,k} \delta_{k,r} \delta_{s,j} = m_{i,r} \delta_{s,j},$$

et :

$$(E_{rs}M)_{i,j} = \sum_{k=1}^n \delta_{i,r} \delta_{s,k} m_{k,j} = m_{s,j} \delta_{r,i}.$$

Donc :

$$m_{i,r} \delta_{s,j} = m_{s,j} \delta_{r,i}.$$

Ces relations sont vraies pour tout $r, s, i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

- pour $i \neq r$ et $s = j$, on a $m_{i,r} = 0$ donc M est diagonale,
- pour $i = r$ et $s = j$, on a $m_{i,i} = m_{j,j}$ donc $M = \lambda I_n$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Synthèse : Posons $M = \lambda I_n$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

$$AM = A \cdot \lambda I_n = \lambda A = (\lambda I_n) \cdot A = MA.$$

Conclusion :

$$\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AM = MA\} = \{\lambda I_n, \lambda \in \mathbb{K}\}.$$



Exercice 3 (Chapitre 19, exemple 12)

1. soit $p \in \mathbb{N}$.

- Soit $x \in K_p$. Alors, $f^p(x) = 0$ donc $f^{p+1}(x) = f(f^p(x)) = f(0) = 0$ et $x \in K_{p+1}$.
Ainsi, $K_p \subset K_{p+1}$.
- Soit $y \in I_{p+1}$, il existe $x \in E$ tel que $y = f^{p+1}(x) = f^p(f(x))$ avec $f(x) \in E$. Ainsi, $y \in I_p$ donc $I_{p+1} \subset I_p$.

2. Raisonnons par l'absurde et supposons que : $\forall r \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $K_r \neq K_{r+1}$. Alors, on aurait :

$$K_0 \subsetneq K_1 \subsetneq \dots \subsetneq K_n \subsetneq K_{n+1}.$$

Donc

$$\dim K_0 < \dim K_1 < \dots < \dim K_p < \dots < \dim K_n < \dim K_{n+1}$$

Montrons par récurrence que : $\forall l \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$, $\dim(K_l) \geq l$.

- Pour $l = 0$, on a $K_0 = \{x \in E, x = 0\} = \{0\}$. Ainsi, $\dim(K_0) = 0$ donc la propriété est vraie.
- Soit $l \in \llbracket 0, n \rrbracket$, supposons que $\dim(K_l) \geq l$.
On a : $\dim(K_{l+1}) > \dim(K_l)$ donc $\dim(K_{l+1}) > l$.
Or, $\dim(K_{l+1}), l \in \mathbb{N}$ donc $\dim(K_{l+1}) \geq l + 1$.
- On a donc prouvé par récurrence que : $\forall l \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket, \dim(K_l) \geq l$.

En particulier, on aurait $\dim K_{n+1} \geq n + 1$. Or, $K_{n+1} \subset E$ donc $\dim K_{n+1} \leq n$. Ainsi, $n + 1 \leq n$. Ce qui est absurde.

Donc il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $r \leq n$ et $K_r = K_{r+1}$.

On considère alors le minimum des entiers qui conviennent.

3. On sait déjà que $I_{r+1} \subset I_r$. De plus, par le théorème du rang :

$$\dim I_{r+1} = \dim E - \dim K_{r+1} = \dim E - \dim K_r = \dim I_r.$$

Ainsi, $I_{r+1} = I_r$.

4. Montrons par récurrence que : $\forall p \in \mathbb{N}, K_{p+r} = K_r$.

- La propriété est immédiatement vraie pour $p = 0$.
- Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons que $K_{p+r} = K_r$.
On sait déjà que $K_{r+p} \subset K_{r+p+1}$ par le 1.
Soit $x \in K_{r+p+1}$, alors $f^{r+p+1}(x) = 0$. Ainsi, $f^{r+1}(f^p(x)) = 0$. Donc $f^p(x) \in K_{r+1}$.
Or, $K_{r+1} = K_r$ donc $f^p(x) \in K_r$.
Ainsi, $f^r(f^p(x)) = 0$ donc $f^{r+p}(x) = 0$.
Finalement, $x \in K_{r+p}$. Donc $K_{r+p+1} \subset K_{r+p}$.
On a donc prouvé que $K_{r+p+1} = K_{r+p} = K_r$.
- On a donc prouvé que : $\forall p \in \mathbb{N}, K_{r+p} = K_r$.

Soit $p \in \mathbb{N}$.

Soit $y \in I_{r+p}$, il existe $x \in E$ tel que $y = f^{r+p}(x) = f^r(f^p(x))$ avec $f^p(x) \in E$.

Ainsi, $y \in I_r$.

Donc : $\forall p \in \mathbb{N}, I_{p+r} \subset I_p$.

De plus, par le théorème du rang, on a :

$$\dim I_{p+r} = \dim E - \dim K_{p+r} = \dim E - \dim K_r = \dim I_r.$$

Ainsi, par égalité des dimensions, $I_{p+r} = I_r$.

5. On sait déjà par le théorème du rang que $\dim K_r + \dim I_r = \dim E$.

Montrons que $K_r \cap I_r = \{0\}$.

Soit $x \in K_r \cap I_r$. Comme $x \in I_r$, il existe $a \in E$ tel que $x = f^r(a)$. De plus, $0 = f^r(x) = f^{2r}(a)$. Ainsi, $a \in K_{2r} = K_r$ d'après la question précédente.

Donc $x = f^r(a) = 0$.

Ainsi, la somme est directe.

Finalement, on a bien prouvé que K_r et I_r sont supplémentaires.



Exercice 4 (Chapitre 19, exercice 11)

- Soit $x \in \text{Ker}(f)$. Montrons que $g(x) \in \text{Ker}(f)$.
On a : $f(g(x)) = g(f(x)) = g(0) = 0$ donc $g(x) \in \text{Ker}(f)$.
Ainsi, $\text{Ker}(f)$ est stable par g .
- Soit $x \in \text{Im}(f)$. Montrons que $g(x) \in \text{Im}(f)$.
Comme $x \in \text{Im}(f)$, il existe $y \in E$ tel que $x = f(y)$ et $g(x) = g(f(y)) = f(g(y)) \in \text{Im}(f)$, donc $\text{Im}(f)$ est stable par g .



Exercice 5 (Chapitre 20, exemple 11)

On note $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}_3$ et $\mathcal{B} = ((1, 3, 1), (1, 0, -2), (0, 1, -1))$.

On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\begin{aligned} u: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (10x - y - z, -6x + 9y - 3z, -2x - y + 11z) \end{aligned}$$

1. Soit $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a :

$$\det_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0.$$

Donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. On a :

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -1 & -1 \\ -6 & 9 & -3 \\ -2 & -1 & 11 \end{pmatrix}$$

3. On a $u(1, 3, 1) = (6, 18, 6) = 6(1, 3, 1)$, $u(1, 0, -2) = (12, 0, -24) = 12(1, 0, -2)$ et $u(0, 1, -1) = (0, 12, -12) = 12(0, 1, -1)$ donc :

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

4. On a $P = \text{Pass}(\mathcal{C}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. Après calculs, on a : $P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \\ -6 & 3 & -3 \end{pmatrix}$. De plus, par formules de changement

de bases : $A = PBP^{-1}$ donc $A^n = PB^nP^{-1}$ et comme B est diagonale :

$$A^n = \frac{6^n}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \\ -6 & 3 & -3 \end{pmatrix} = 6^{n-1} \begin{pmatrix} 2+2^{n+2} & 1-2^n & 1-2^n \\ 6(1-2^n) & 3(1+2^n) & 3(1-2^n) \\ 2-2^{n+1} & 1-2^n & 1+5.2^n \end{pmatrix}$$



Correction de la séance 2

Polynômes de Lagrange



Exercice de calcul (Chapitre 9, exemple 8)

On résout : $y' + \frac{1}{x}y = \frac{\cos(x)}{x}$ (E) sur $\mathbb{R}^{++}$.

- On résout : $y' + \frac{1}{x}y = 0$ (E_0) sur $\mathbb{R}^{++}$.

Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^{++}$ est $x \mapsto \ln x$ donc les solutions de (E_0) sont :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{++} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \lambda e^{-\ln x} = \frac{\lambda}{x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

- D'après la méthode de variation de la constante, on cherche une solution de (E) de la forme : $y : x \mapsto \frac{\lambda(x)}{x}$ avec λ dérivable. On a :

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{\cos(x)}{x} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^{++}, \frac{\lambda'(x)}{x} = \frac{\cos(x)}{x} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^{++}, \lambda'(x) = \cos(x).$$

Donc $\lambda : x \mapsto \sin x$ convient et $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est solution particulière de (E).

- Les solutions de (E) sont donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{++} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \lambda = \frac{\lambda + \sin x}{x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$



Inégalité

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^{++}$.

$$|f_n(x)| \leq \frac{x}{n \cdot n^2 x} \leq \frac{1}{n^3}$$

et comme $f_n(0) = 0$, cette inégalité reste vraie pour $x \in \mathbb{R}^+$.

Posons : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{n^3}$. Alors (u_n) convient.



Exercice 6 (Chapitre 19, exercice 17)

- Montrons que φ est linéaire :
Soient $P, Q \in \mathbb{K}_n[X]$, soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. On a :

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda P + \mu Q) &= ((\lambda P + \mu Q)(a_1), \dots, (\lambda P + \mu Q)(a_{n+1})) \\ &= \lambda(P(a_1), \dots, P(a_{n+1})) + \mu(Q(a_1), \dots, Q(a_{n+1})) \\ &= \lambda\varphi(P) + \mu\varphi(Q) \end{aligned}$$

- Montrons que $\text{Ker } \varphi = \{0\}$.
Soit $P \in \text{Ker } \varphi$ alors $P \in \mathbb{K}_n[X]$. De plus, $\varphi(P) = 0$. Donc : $\forall i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$, $P(a_i) = 0$. Or, les $(a_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ sont deux à deux distincts. Ainsi, P admet au moins $n+1$ racines distinctes. Or, $\deg(P) \leq n$. Donc, $P = 0$.
Ainsi, $\text{Ker } \varphi \subset \{0\}$.
Donc, $\text{Ker } \varphi = \{0\}$.
Ainsi, φ est injective.
- De plus, $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n+1 = \dim(\mathbb{K}^{n+1})$ donc φ est bijective.

Ainsi, φ est un isomorphisme.

2. • φ est un isomorphisme donc φ^{-1} est un isomorphisme.
Or, l'image d'une base par un isomorphisme est encore une base. Ainsi, $(L_1, \dots, L_{n+1})$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
• Soit $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$, on a $\varphi^{-1}(e_k) = L_k$ donc $\varphi(L_k) = e_k$.
Ainsi, on a :

$$L_k(a_k) = 1 \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket \setminus \{k\}, L_k(a_i) = 0.$$

On sait que $L_k \in \mathbb{K}_n[X]$ donc L_k est un polynôme de degré au plus n .

De plus, $L_k(a_k) \neq 0$ donc L_k n'est pas le polynôme nul.

Par ailleurs, les a_i avec $i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket \setminus \{k\}$ sont racines de L_k et sont deux à deux distincts donc L_k admet au moins n racines distinctes. Comme $\deg L_k \leq n$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $L_k = \lambda \prod_{i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket \setminus \{k\}} (X - a_i)$.

$$\text{Enfin, comme } 1 = L_k(a_k) = \lambda \prod_{i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket \setminus \{k\}} (a_k - a_i).$$

$$\text{On obtient : } \lambda = \frac{1}{\prod_{i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket \setminus \{k\}} (a_k - a_i)} \quad (\text{le dénominateur est bien non nul car les } a_i \text{ sont deux à deux distincts}).$$

Finalement :

$$L_k = \frac{\prod_{i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket \setminus \{k\}} (X - a_i)}{\prod_{i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket \setminus \{k\}} (a_k - a_i)}$$

3. Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$.

Comme $(L_1, \dots, L_{n+1})$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$, il existe un unique $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que $P = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k L_k$.

Soit $i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$.

$$\text{En évaluant en } a_i, \text{ on obtient : } P(a_i) = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k L_k(a_i) = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k \delta_{k,i} = \lambda_i.$$

$$\text{Ainsi : } P = \sum_{k=1}^{n+1} P(a_k) L_k.$$



Problème 1 (DM8)

1. (a) Comme $\prod_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}} (a_i - a_j) \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\deg L_i = \sum_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}} 1 = n-1.$$

- (b) Soient $i, k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

- si $i \neq k$, alors :

$$L_i(a_k) = \frac{\prod_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}} (a_k - a_j)}{\prod_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}} (a_i - a_j)} = \frac{(a_k - a_k) \prod_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i, k\}} (a_k - a_j)}{\prod_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}} (a_i - a_j)} = 0.$$

- si $i = k$, alors :

$$L_i(a_k) = \frac{\prod_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}} (a_k - a_j)}{\prod_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}} (a_i - a_j)} = \frac{\prod_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}} (a_k - a_j)}{\prod_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}} (a_k - a_j)} = 1.$$

Donc :

$$L_i(a_k) = \delta_{i,k}.$$

- (c) • Analyse : Supposons qu'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $P = \sum_{i=1}^n \lambda_i L_i$.

Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a :

$$P(a_k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i L_i(a_k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{i,k} = \lambda_k.$$

Donc :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_k = P(a_k).$$

- Synthèse : posons $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_k = P(a_k)$.

Soit $Q = P - \sum_{i=1}^n \lambda_i L_i$.

- Comme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, L_i \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, alors $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
- Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

$$Q(a_k) = P(a_k) - \sum_{i=1}^n \lambda_i L_i(a_k) = P(a_k) - \lambda_k = 0.$$

- Ainsi Q admet au moins n racines distinctes et $\deg(Q) \leq n-1$. Donc $Q = 0$. D'où :

$$P = \sum_{i=1}^n \lambda_i L_i.$$

- Ainsi : il existe un unique $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $P = \sum_{i=1}^n \lambda_i L_i$ et :

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (P(a_1), \dots, P(a_n)).$$

- (d) Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. D'après la question précédente, $P = \sum_{i=1}^n P(a_i) L_i$. Donc :

$$(\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(a_k) = x_k) \iff P = \sum_{i=1}^n x_i L_i,$$

d'après l'unicité des coefficients de la décomposition.

Ainsi : il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(a_k) = x_k$ et on a : $P = \sum_{i=1}^n x_i L_i$.

- (e) i. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_i$ est racine simple de Φ donc : $\Phi'(a_i) \neq 0$.

- ii. D'après 1.d, $Q = \sum_{i=1}^n x_i L_i$.

De plus, soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

$$Q = (X - a_i) \prod_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}} (X - a_k).$$

Donc :

$$Q' = \prod_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}} (X - a_k) + (X - a_i) \left(\prod_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}} (X - a_k) \right)'.$$

Ainsi : $Q'(a_i) = \prod_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}} (a_i - a_k)$. Donc :

$$Q(X) = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\prod_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}} (X - a_j)}{\Phi'(a_i)}.$$

2. $|f|$ est une fonction continue sur le segment $[-1, 1]$, donc, d'après le théorème des bornes atteintes, $|f|$ admet un maximum sur $[-1, 1]$.

3. (a) i. $\varphi(t) = 0 \iff f(t) - P(t) - \lambda \Phi(t) = 0 \iff \lambda \varphi(t) = f(t) - P(t)$
Or $t \in [-1, 1] \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$, donc $\Phi(t) \neq 0$, ainsi :

$$\lambda = \frac{f(t) - P(t)}{\Phi(t)} \text{ convient.}$$

- ii. • – Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a : $\varphi(a_i) = f(a_i) - P(a_i) - \lambda \Phi(a_i) = 0$.
 – $\varphi(t) = 0$
 Donc φ s'annule en $a_1, \dots, a_n$, $t \in [0, 1]$ ainsi φ s'annule $n+1$ fois au moins sur $[-1, 1]$.
 • Soient $-1 \leq b_1 < \dots < b_{n+1} \leq 1$ tels que φ s'annule en b_j pour tout $j \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$.
 Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, φ est continue sur $[b_j, b_{j+1}]$, dérivable sur $]b_j, b_{j+1}[$ et $\varphi(b_j) = \varphi(b_{j+1})$. Donc, d'après le théorème de Rolle, il existe $c_j \in]b_j, b_{j+1}[$ tel que $\varphi'(c_j) = 0$. Comme $-1 \leq c_1 < \dots < c_n \leq 1$, φ' s'annule au moins n fois sur $[-1, 1]$.
- iii. Par récurrence, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\varphi^{(k)}$ s'annule au moins $n+1-k$ fois sur $[-1, 1]$ donc $\varphi^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur $[-1, 1]$.
- iv. • On a : $\forall x \in [-1, 1]$, $\varphi^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - P^{(n)}(x) - \lambda \Phi^{(n)}(x)$.
 Donc : $\varphi^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) - P^{(n)}(a) - \lambda \Phi^{(n)}(a)$.
 Or $\varphi^{(n)}(a) = 0$ donc :

$$f^{(n)}(a) - P^{(n)}(a) - \lambda \Phi^{(n)}(a) = 0.$$

- On a $\deg P \leq n-1$ donc $P^{(n)} = 0$ ainsi :

$$f^{(n)}(a) = \lambda \Phi^{(n)}(a).$$

- $\Phi = X^n + R$ avec $\deg R \leq n-1$ donc $\Phi^{(n)} = (X^n)^{(n)} + R^{(n)}$.

Or $\deg R \leq n-1$ donc $R^{(n)} = 0$ et :

$$(X^n)^{(n)} = \frac{n!}{(n-n)!} X^{n-n} = n!$$

Donc :

$$\Phi^{(n)} = n!$$

- D'où : $f^{(n)}(a) = \lambda n!$ donc $\lambda = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$.

Or : $\lambda = \frac{f(t) - P(t)}{\Phi(t)}$, ainsi :

$$f(t) - P(t) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \Phi(t).$$

(b) Soit $t \in [-1, 1]$.

- Si $t \in \{a_1, \dots, a_n\}$ alors :

$$|f(t) - P(t)| = 0 \leq \frac{M_n}{n!} |\Phi(t)|.$$

- Si $t \in [-1, 1] \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ alors :

$$|f(t) - P(t)| = \frac{|f^{(n)}(a)|}{n!} |\Phi(t)| \leq \frac{M_n}{n!} |\Phi(t)|.$$

- Dans tous les cas :

$$|f(t) - P(t)| \leq \frac{M_n}{n!} |\Phi(t)|.$$



Exercice 7 (Chapitre 25, exemple 15)

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, soient $a_0, \dots, a_n$ des réels distincts. On pose :

$$\forall P, Q \in E, (P|Q) = \sum_{k=0}^n P(a_k) Q(a_k).$$

1. Il est clair que $(\cdot|\cdot)$ est bilinéaire, symétrique et positif.

Soit $P \in E$ tel que $(P|P) = 0$.

On a $\sum_{k=0}^n P(a_k)^2 = 0$.

Or $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P(a_k)^2 \geq 0$ donc $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P(a_k) = 0$.

Ainsi P admet au moins $n+1$ racines distinctes et comme $\deg P \leq n$, on a $P = 0$.

Donc $(\cdot|\cdot)$ est défini et est bien un produit scalaire.

2. Posons, pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$L_i = \frac{\prod_{j \in \llbracket 0, n \rrbracket \setminus \{i\}} (X - a_j)}{\prod_{j \in \llbracket 0, n \rrbracket \setminus \{i\}} (a_i - a_j)}.$$

On remarque (voir problème précédent) que : $\forall i, k \in \llbracket 0, n \rrbracket, L_i(a_k) = \delta_{i,k}$.

Soient $i, j \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$(L_i | L_j) = \sum_{k=0}^n L_i(a_k) L_j(a_k) = \sum_{k=0}^n \delta_{i,k} \delta_{j,k} = \delta_{i,j}.$$

Ainsi $(L_0, \dots, L_n)$ est une famille orthonormée de E .

Comme $\text{Card}(L_0, \dots, L_n) = n+1 = \dim E$, alors $(L_0, \dots, L_n)$ est une base orthonormée de E .

3. On a : $F = \{P \in E, \sum_{k=0}^n P(a_k) \cdot 1 = 0\} = \{P \in E, \sum_{k=0}^n (P|1) = 0\}$.

Ainsi $F = \text{Vect}(1)^\perp$. Donc :

$$F^\perp = \text{Vect}(1)^{\perp\perp} = \text{Vect}(1).$$

4. On a $\|1\| = \sqrt{\sum_{k=0}^n 1^2} = \sqrt{n+1}$. Ainsi $\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ est une base orthonormée de $F^\perp$.

Donc $p_{F^\perp}(Q) = (Q | \frac{1}{\sqrt{n+1}}) \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n Q(a_k)$.

Donc :

$$d(Q, F) = \|p_{F^\perp}(Q)\| = \frac{1}{n+1} \left| \sum_{k=0}^n Q(a_k) \right| \|1\| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left| \sum_{k=0}^n Q(a_k) \right|.$$

Correction de la séance 3

Suites récurrentes

Exercice de calcul (Chapitre 6, exemple 18)

• Méthode 1 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose : $f : x \mapsto (1+x)^n$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$, d'après la formule du binôme de Newton.

De plus, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k x^{k-1}$.

En évaluant cette égalité en 1, on obtient : $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k = n2^{n-1}$.

• Méthode 2 :

Soit $k \in [1, n]$,

$$\begin{aligned} k \binom{n}{k} &= k \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k(k-1)!} = \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!} \\ &= \frac{n!}{(n-1-(k-1))!(k-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1-(k-1))!(k-1)!} = n \binom{n-1}{k-1} \end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} \\ &= n \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l} \quad \text{par changement d'indice } l = k-1 \\ &= n2^{n-1} \quad \text{par le binôme de Newton.} \end{aligned}$$

Inégalité

Soit $(x, t) \in [a, b] \times \mathbb{R}^+$, on a : $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{-t^2 e^{-t^2 x}}{1+t^2}$. Donc :

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| = \frac{t^2 e^{-t^2 x}}{1+t^2} \leq e^{-t^2 x} \leq e^{-t^2 a}.$$

Posons $h : t \mapsto e^{-t^2 a}$ alors h est continue sur $\mathbb{R}^+$ et, par croissances comparées, $h(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc h convient.



Exercice 8 (Chapitre 11, exercice 22)

Posons $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2 + \frac{3}{16}$.

Déterminons les points fixes de f :

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff x^2 + \frac{3}{16} = x \\ &\iff 16x^2 - 16x + 3 = 0 \end{aligned}$$

Le discriminant de $16x^2 - 16x + 3$ vaut $16^2 - 4 \times 3 \times 16 = 16(16 - 12) = 16 \times 4 = 8^2$.

Ainsi, on a :

$$f(x) = x \iff x = \frac{1}{4} \text{ ou } x = \frac{3}{4}$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = 2x$.

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$+\infty$
$f'(x)$		-	+	+	+
f	$+\infty$		$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$+\infty$

De plus, soit $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) - x = x^2 - x + \frac{3}{16} = \left(x - \frac{1}{4}\right)\left(x - \frac{3}{4}\right).$$

Donc $f(x) - x \leq 0 \iff x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$.

- Si $u_0 \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$, comme $\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$ est stable. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$.

De plus, f est croissante sur $\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$, ainsi, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone.

$u_1 - u_0 = f(u_0) - u_0 \leq 0$. Ainsi, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. De plus, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par $\frac{1}{4}$ donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$ par théorème de la limite monotone.

De plus, f est continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $f(l) = l$ donc $l = \frac{1}{4}$ ou $l = \frac{3}{4}$. De plus, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Ainsi, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$u_n \leq u_0$ donc par passage à la limite, on a : $l \leq u_0$. D'où $l < \frac{3}{4}$. Ainsi, $l = \frac{1}{4}$.

- Si $u_0 \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$, comme $\left[0, \frac{1}{4}\right]$ est stable. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$.

De plus, f est croissante sur $\left[0, \frac{1}{4}\right]$, ainsi, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone.

$u_1 - u_0 = f(u_0) - u_0 \geq 0$. Ainsi, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. De plus, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée par $\frac{1}{4}$ donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$ par théorème de la limite monotone.

De plus, f est continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $f(l) = l$ donc $l = \frac{1}{4}$ ou $l = \frac{3}{4}$. De plus, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée par $\frac{1}{4}$. Ainsi, par passage à la limite, on a : $l \leq \frac{1}{4}$. Ainsi, $l = \frac{1}{4}$.

- Si $u_0 \in \left]\frac{3}{4}, +\infty\right[$ comme $\left]\frac{3}{4}, +\infty\right[$ est stable. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in \left]\frac{3}{4}, +\infty\right[$.

De plus, f est croissante sur $\left]\frac{3}{4}, +\infty\right[$, ainsi, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone.

$u_1 - u_0 = f(u_0) - u_0 \geq 0$. Ainsi, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Si, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$ par théorème de la limite monotone.

De plus, f est continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $f(l) = l$ donc $l = \frac{1}{4}$ ou $l = \frac{3}{4}$. De plus, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par u_0 . Ainsi, par passage à

la limite, on a : $l \leq u_0$. Ainsi, $l > \frac{3}{4}$, ce qui est absurde. Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée. Et, comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, on a : $\lim u_n = +\infty$.

- Si $u_0 < 0$, alors $u_1 > 0$ donc on peut appliquer le résultat précédent à la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. De plus, on a : $u_1 \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}] \iff u_0 \in [-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}]$, $u_1 \in [0, \frac{1}{4}] \iff u_0 \in [-\frac{1}{4}, 0]$ et $u_1 \in [\frac{3}{4}, +\infty[\iff u_0 \in]-\infty, -\frac{3}{4}]$.
 - En conclusion : la suite (u_n) converge vers $\frac{1}{4}$ si $u_0 \in]-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}]$, la suite (u_n) converge vers $\frac{3}{4}$ si $u_0 = \pm \frac{3}{4}$ et sinon, la suite (u_n) diverge vers $+\infty$
-



Exercice 9 (Chapitre 14, exercice 17)

Posons $f : x \mapsto 2 + \frac{1}{2} \sin x$.

$u_0 \in \mathbb{R}$ donc $u_1 \in [\frac{3}{2}, \frac{5}{2}]$ car $\sin$ à valeurs dans $[-1, 1]$. De plus, $[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}]$ est stable par f car $\sin$ à valeurs dans $[-1, 1]$. Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est à valeurs dans $[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}]$.

Posons $g : x \mapsto f(x) - x$.

$$g\left(\frac{3}{2}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{3}{2} \geq 0 \text{ et } g\left(\frac{5}{2}\right) = f\left(\frac{5}{2}\right) - \frac{5}{2} \leq 0.$$

De plus, g est continue sur $[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}]$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [\frac{3}{2}, \frac{5}{2}]$ tel que $g(c) = 0$. Donc

$f(c) = c$. Ainsi, f admet au moins un point fixe dans $[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}]$.

Enfin, f est dérivable sur $[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}]$ et on a :

$$\forall x \in [\frac{3}{2}, \frac{5}{2}], |f'(x)| = \left|\frac{1}{2} \cos(x)\right| \leq \frac{1}{2}.$$

Ainsi, d'après l'inégalité des accroissements finis, soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$|f(u_n) - f(c)| \leq \frac{1}{2} |u_n - c|.$$

Ainsi :

$$|u_{n+1} - c| \leq \frac{1}{2} |u_n - c|.$$

Donc :

$$|u_n - c| \leq \frac{1}{2^{n-1}} |u_1 - c|.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$, alors, la suite (u_n) converge vers c .



Problème 2 (Problème supplémentaire 12)

- u est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$ donc u est bijective de $[0, +\infty[$ vers $[u(0), \lim_{+\infty} u[= [-6, +\infty[$.
 - u est bijective de $[0, +\infty[$ vers $[-6, +\infty[$ et $0 \in [-6, +\infty[$ donc il existe un unique $\alpha \in [0, +\infty[$ tel que :

$$u(\alpha) = 0.$$

- On a : $u(1) = 3$ et $u(2) = 6$, donc $u(1) \leq u(\alpha) \leq u(2)$.

Or u est strictement croissante donc :

$$1 \leq \alpha \leq 2.$$

- Montrons que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha.$$

- Pour $n = 0$, $u_0 = \alpha$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n = \alpha$.

Alors :

$$u_{n+1} = \frac{6}{2 + \alpha^2}.$$

Or $\alpha^3 + 2\alpha - 6 = 0$, donc $\alpha(2 + \alpha^2) = 6$ et ainsi : $\frac{6}{2 + \alpha^2} = \alpha$. Donc :

$$u_{n+1} = \alpha.$$

- Ainsi, par récurrence :

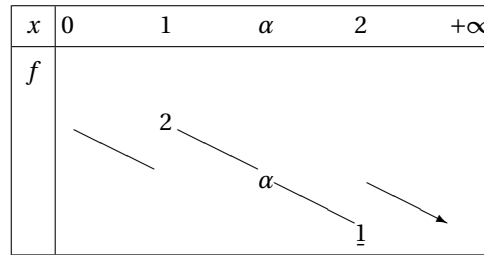
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha.$$

- (b) • f est dérivable et :

$$\forall x \in]0, +\infty[, f'(x) = -\frac{12x}{(1+x^2)^2} < 0.$$

Donc f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

- On a : $f(1) = 2$, $f(2) = 1$ et $f(\alpha) = \alpha$.



- (c) i. • Pour $n = 0$, $u_{2n} = u_0 \in [1, \alpha[$.
 • Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_{2n} \in [1, \alpha[$.
 Alors :

$$u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f \circ f(u_{2n}).$$

Or $u_{2n} \in [1, \alpha[$ donc $f(u_{2n}) \in]\alpha, 2]$, ainsi :

$$u_{2(n+1)} \in]1, \alpha[.$$

- Ainsi, par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} \in [1, \alpha[.$$

- ii. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{2(n+1)} - u_{2n} &= f \circ f(u_{2n}) - u_{2n} \\ &= -\frac{(u_{2n} - 1)(u_{2n} - 2)(u_{2n}^3 + 2u_{2n} - 6)}{(2 + u_{2n}^2)^2 + 18} \end{aligned}$$

Or :

- $u_{2n} - 1 \geq 0$,
- $u_{2n} - 2 < 0$,
- $u_{2n} - 2)(u_{2n}^3 + 2u_{2n} - 6 = u(u_{2n}) < 0$ car $u_{2n} < \alpha$ et u strictement croissante,
- $(2 + u_{2n}^2)^2 + 18 > 0$.

Donc :

$$u_{2(n+1)} - u_{2n} \leq 0.$$

Ainsi $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

- iii. • $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 1 donc, $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $l \in [1, u_0] \subset [1, \alpha[$.
 • On a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2(n+1)} = f \circ f(u_{2n})$ et f est continue donc :

$$f \circ f(l) = l.$$

Ainsi :

$$\frac{(l-1)(l-2)(l^3 + 2l - 6)}{(2 + l^2)^2 + 18} = 0.$$

Donc $l \in \{1, 2\alpha\}$. Or $l \in [1, \alpha[$, donc $l = 1$.

- Donc $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1.

- (d) • Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{2n+1} = f(u_{2n}) \in]\alpha, 2],$$

- car $u_{2n} \in]1, \alpha[$.
 • Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{2(n+1)} \leq u_{2n}$ et f décroissante donc : $f(u_{2(n+1)}) \geq f(u_{2n})$ ainsi :

$$u_{2n+3} \geq u_{2n+1}.$$

- Donc $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
 • On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+1} = f(u_{2n})$ et $\lim u_{2n} = 1$ et f continue en 1, donc :

$$\lim u_{2n+1} = f(1) = 2.$$

- (e) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet deux suites extraites convergeant vers des limites différentes donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de limite.



Dénombrement et probabilités



Exercice de calcul (Chapitre 16, exemple 7)

Calculer le développement limité des fonctions suivantes :

1.

$$\operatorname{Arctan}(x^3) = x^3 + o(x^8)$$

2.

$$\begin{aligned} (\cos x)^x &= e^{x \ln(\cos x)} \\ &= e^{x \ln(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3))} \\ &= e^{x(-\frac{x^2}{2} + o(x^3))} \\ &= e^{-\frac{x^3}{2} + o(x^4)} \\ &= 1 - \frac{x^3}{2} + o(x^4) \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \sqrt{1 + 4 \sin x}} &= \sqrt{1 + \sqrt{1 + 4(x + o(x^2))}} \\ &= \sqrt{1 + 1 + 2x - \frac{(4x)^2}{8} + o(x^2)} \\ &= \sqrt{2 + 2x - 2x^2 + o(x^2)} \\ &= \sqrt{2} \sqrt{1 + x - x^2 + o(x^2)} \\ &= \sqrt{2} \left(1 + \frac{x - x^2}{2} - \frac{(x - x^2)^2}{8} + o(x^2) \right) \\ &= \sqrt{2} \left(1 + \frac{x - x^2}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2) \right) \\ &= \sqrt{2} \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{5x^2}{8} + o(x^2) \right) \end{aligned}$$



4.

$$\begin{aligned}
 \cos(\sin x) &= \cos\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)\right) \\
 &= 1 - \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)^2 + \frac{1}{24} \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)^4 - \frac{1}{720} \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)^6 + o(x^6) \\
 &= 1 - \frac{1}{2} \left(x^2 + 2x\left(-\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right) + \left(-\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)^2\right) + \frac{1}{24} \left(x^4 + 4x^3\left(-\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)\right) - \frac{1}{720} (x^6) + o(x^6) \\
 &= 1 - \frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{60} + \frac{x^6}{36}\right) + \frac{1}{24} \left(x^4 - \frac{2x^6}{3}\right) - \frac{x^6}{720} + o(x^6) \\
 &= 1 - \frac{1}{2} x^2 + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{24}\right)x^4 + \left(-\frac{1}{120} - \frac{1}{72} - \frac{1}{36} - \frac{1}{720}\right)x^6 + o(x^6) \\
 &= 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{5}{24} x^4 - \frac{37}{720} x^6 + o(x^6)
 \end{aligned}$$

Inégalité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. f_n est dérivable sur $[1, +\infty[$ et $\forall x \in [1, +\infty[, f'_n(x) = \frac{2x(1 + n^2 x^2) - x^2 \cdot 2n^2 x}{(1 + n^2 x^2)^2} = \frac{2x}{(1 + n^2 x^2)^2} > 0$.

Donc f_n est strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

Ainsi, soit $x \in [1, +\infty[$,

$$|f_n(x)| = f_n(x) \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \frac{1}{n^2}.$$

Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{n^2}$, alors (u_n) convient.



Exercice 10 (Chapitre 21, exemple 7)

1. Mettre au plus un prospectus par boîte quand les prospectus sont identiques, revient à choisir les 7 boîtes aux lettres dans lesquelles on met un prospectus, c'est-à-dire choisir un ensemble à 7 éléments dans un ensemble à 10 éléments, il y a donc : $\binom{10}{7}$ possibilités.
2. Mettre au plus un prospectus par boîte quand les prospectus sont tous différents, revient à choisir pour chacun des 7 prospectus une boîte aux lettres distincte des autres, c'est-à-dire choisir un 7-uplet d'éléments deux à deux distincts d'un ensemble à 10 éléments, il y a donc : $10!/3!$ possibilités.
3. Mettre un nombre quelconque de prospectus par boîte quand les prospectus sont tous différents, revient à choisir pour chacun des 7 prospectus une boîte aux lettres, c'est-à-dire choisir un 7-uplet d'un ensemble à 10 éléments, il y a donc : 10^7 possibilités.
4. Mettre un nombre quelconque de prospectus par boîte quand les prospectus sont identiques, revient à choisir un mot constitué de 9 lettres I (cloisons entre les boîtes aux lettres) et 7 lettres O (prospectus), c'est-à-dire choisir la position des 9 lettres I parmi les 16 positions possibles, il y a donc : $\binom{16}{7}$ possibilités.



Exercice 11 (Chapitre 22, exemple 9)

Pour $k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$, on note A_k : « on transfère k boules blanches de l'urne B dans l'urne A »

1. On a :

$$P(A_0) = \frac{\binom{8}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{14}{33}, P(A_1) = \frac{\binom{8}{1}\binom{4}{1}}{\binom{12}{2}} = \frac{16}{33}, P(A_2) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{1}{11}.$$

De plus, on note B l'événement « on pioche une boule blanche de l'urne A » on a :

$$P(B|A_0) = \frac{6}{13}, P(B|A_1) = \frac{7}{13}, P(B|A_2) = \frac{8}{13}.$$

Or, (A_0, A_1, A_2) forme un système complet d'événements.

Ainsi, par la formule des probabilités totales, on a :

$$P(B) = P(B|A_0)P(A_0) + P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) = \frac{220}{429}.$$

2. On cherche $P(A_1 \cup A_2|B)$.

On pose C : « l'une au moins des boules transférées est blanche ».

On a : $C = A_1 \cup A_2$. Ainsi :

$$P(C|B) = P(A_1 \cup A_2|B) = P_B(A_1 \cup A_2) = P_B(A_1) + P_B(A_2)$$

car A_1 et A_2 sont incompatibles et P_B est une probabilité.

$$\begin{aligned} P(C|B) &= \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B)} + \frac{P(B|A_2)P(A_2)}{P(B)} \\ &= \frac{\frac{16}{33} \times \frac{7}{13}}{\frac{220}{429}} + \frac{\frac{1}{11} \times \frac{8}{13}}{\frac{220}{429}} \\ &= \frac{28}{55} + \frac{6}{55} \\ &= \frac{34}{55} \end{aligned}$$



Exercice 12 (Chapitre 22, exemple 13)

Méthode 1 :

Notons Z la variable aléatoire égale au nombre de candidats ayant réussi à l'issue des 2 épreuves.

Notons U la variable aléatoire égale au nombre de candidats ayant réussi à l'issue de la première épreuve.

La variable aléatoire U représente le nombre de succès (réussir à la première épreuve) lors de la répétition de n expériences de Bernoulli indépendantes, chacune ayant la probabilité p de réussir. Ainsi, U suit une loi binomiale de paramètres n, p .

Notons V la variable aléatoire égale au nombre de candidats ayant réussi à la 2ème épreuve (et donc raté la première). Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Supposons $(U = k)$ réalisé. On a alors $n - k$ candidats qui passent la deuxième épreuve et chaque candidat à la probabilité p de réussir.

Ainsi, pour tout $i \in \llbracket 0, n - k \rrbracket$, on a :

$$P(V = i|U = k) = \binom{n-k}{i} p^i (1-p)^{n-k-i}.$$

On a $Z = U + V$ et $Z(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$.

De plus, $(U = k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est un système complet d'événements.

D'après la formule de probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned}
 P(Z = j) &= \sum_{k=0}^n P((U + V = j) \cap (U = k)) \\
 &= \sum_{k=0}^n P((V = j - k) \cap (U = k)) \\
 &= \sum_{k=0}^j P((V = j - k) \cap (U = k)) \text{ car } (V = j - k) = \emptyset \text{ si } j - k < 0 \\
 &= \sum_{k=0}^j P(V = j - k | U = k) P(U = k) \\
 &= \sum_{k=0}^j \binom{n-k}{j-k} p^{j-k} (1-p)^{n-k-(j-k)} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
 &= \sum_{k=0}^j \binom{n-k}{j-k} \binom{n}{k} p^j (1-p)^{2n-j-k}
 \end{aligned}$$

Or,

$$\binom{n-k}{j-k} \binom{n}{k} = \frac{(n-k)!}{(n-j)!(j-k)!} \times \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{j!}{k!(j-k)!} \times \frac{n!}{j!(n-j)!} = \binom{j}{k} \binom{n}{j}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 P(Z = j) &= \binom{n}{j} p^j (1-p)^{2n-2j} \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} (1-p)^{j-k} \\
 &= \binom{n}{j} p^j (1-p)^{2n-2j} (1 + 1 - p)^j \\
 &= \binom{n}{j} p^j (1-p)^{2n-2j} (2-p)^j \\
 &= \binom{n}{j} ((1-p)^2)^{n-j} (p(2-p))^j \\
 &= \binom{n}{j} (1-p(2-p))^{n-j} (p(2-p))^j
 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$Z \sim \mathcal{B}(n, p(2-p)).$$

Méthode 2 :

Notons R_1 réussir à l'issue de la 1ère tentative et R_2 réussir à l'issue de la 2ème tentative (et donc rater la 1ère).

$(R_1, \overline{R_1})$ est un système complet d'événements.

Ainsi, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned}
 P(R_1 \cup R_2) &= P(R_1 \cup R_2 | R_1) P(R_1) + P(R_1 \cup R_2 | \overline{R_1}) P(\overline{R_1}) \\
 &= 1 \times P(R_1) + P(R_2) P(\overline{R_1}) \\
 &= p + p(1-p) \\
 &= p(2-p)
 \end{aligned}$$

Ainsi, Z représente le nombre de succès (réussir à l'issue d'une des deux tentatives) lors la répétition de n expériences de Bernoulli indépendantes chacune ayant la probabilités $P(R_1 \cup R_2) = p(2-p)$ de réussir.

Ainsi, Z suit une loi binomiale de paramètre $n, p(2-p)$.

Théorème de Césaro



Exercice de calcul (Chapitre 12, exemple 9)

Posons $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On a $A = U - I_3$. Comme U et I_3 commutent, on a, d'après le binôme de Newton :

$$A^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} U^k (-I_3)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} U^k.$$

On remarque que $U^2 = 3U$, on a ainsi : $\forall k \in \mathbb{N}^*, U^k = 3^{k-1}U$ donc :

$$\begin{aligned} A^n &= (-1)^n I_3 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} U^k \\ &= (-1)^n I_3 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} 3^{k-1} U \\ &= (-1)^n I_3 + \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} 3^{k-1} - \frac{(-1)^n}{3} \right) U \\ &= (-1)^n I_3 + \left(\frac{(-1+3)^n}{3} - \frac{(-1)^n}{3} \right) U \\ &= (-1)^n I_3 + \frac{2^n - (-1)^n}{3} U. \end{aligned}$$



Inégalité

Soit $(x, t) \in (\mathbb{R}^+)^2$, on a : $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{t^2 \cos(xt)}{(1+t^2)^2}$. Donc :

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{t^2}{(1+t^2)^2} \leq \frac{1}{1+t^2}.$$

Posons $g : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ alors g convient.



Exercice 13 (Chapitre 11, exemple 5)

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\forall n \geq N, |u_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Soit $n \geq N$,

$$\begin{aligned}
 |v_n - l| &= \left| \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k \right) - l \right| = \left| \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k \right) - \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n l \right) \right| = \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (u_k - l) \right| \\
 &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |u_k - l| \quad \text{d'après l'inégalité triangulaire} \\
 &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N-1} |u_k - l| + \frac{1}{n} \sum_{k=N}^n |u_k - l| \\
 &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N-1} |u_k - l| + \frac{1}{n} \sum_{k=N}^n \frac{\varepsilon}{2} \\
 &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N-1} |u_k - l| + \frac{\varepsilon}{2} \frac{n - N + 1}{n} \\
 &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N-1} |u_k - l| + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{car } \frac{n - (N - 1)}{n} \leq 1
 \end{aligned}$$

Or $\sum_{k=1}^{N-1} u_k$ est constant (car N est fixé), donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N-1} u_k = 0$. Ainsi, il existe un rang $N' \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N' \implies \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N-1} |u_k| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit $n \geq \max(N, N')$, on a alors $|v_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Ainsi, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l .



Problème 3 (Révisions Noël)

1. (a) • Pour $n = 2$, $x_2 = \frac{2}{3}$ donc $0 < x_2 < 1$.
 • Soit $n \geq 2$, supposons que $0 < x_n < 1$. Alors :

$$x_{n+1} = \frac{x_n(1 + x_n)}{1 + 2x_n} > 0.$$

et :

$$x_{n+1} - 1 = \frac{x_n(1 + x_n) - (1 + 2x_n)}{1 + 2x_n} = \frac{x_n^2 - x_n - 1}{1 + 2x_n}.$$

Or le discriminant associé à $x^2 - x - 1 = 0$ est $\Delta = 5$ et ses racines sont $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Or : $\frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0 < x_n < 1 < \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ donc : $x_n^2 - x_n - 1 > 0$, ainsi $x_{n+1} - 1 > 0$.

Donc : $0 < x_{n+1} < 1$.

- On a donc prouvé par récurrence que :

$$\forall n \geq 2, 0 < x_n < 1.$$

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n(1 + x_n) - x_n(1 + 2x_n)}{1 + 2x_n} = \frac{-x_n^2}{1 + 2x_n} \leq 0.$$

Donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

- (c) • La suite (x_n) est décroissante et minorée par 0 donc (x_n) converge vers $l \in [0, 1]$.
 • Par passage à la limite, on a donc : $l = \frac{l(1+l)}{1+2l}$. Or :

$$l = \frac{l(1+l)}{1+2l} \Leftrightarrow l = 0 \text{ ou } 1 = \frac{1+l}{1+2l} \Leftrightarrow l = 0 \text{ ou } 1+2l = 1+l \Leftrightarrow l = 0.$$

Donc (x_n) converge vers 0.

(d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} = \frac{1+2x_n}{x_n(1+x_n)} - \frac{1}{x_n} = \frac{1+2x_n-(1+x_n)}{x_n(1+x_n)} = \frac{1}{x_n+1}.$$

(e) Comme $\lim x_n = 0$, on a : $\lim \frac{1}{x_{n+1}} = 1$.

Ainsi $\lim u_n = 1$.

(f) • Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{x_{k+1}} - \frac{1}{x_k} \right).$$

Donc, par sommes télescopiques :

$$v_n = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_1} \right).$$

• Comme $\lim u_n = 1$, par théorème de Césaro, $\lim v_n = 1$.

Or, soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $v_n = \frac{1}{nx_{n+1}} - \frac{1}{n}$.

Donc : $\frac{1}{nx_{n+1}} = v_n + \frac{1}{n}$, ainsi : $\lim \frac{1}{nx_{n+1}} = 1$ donc $\lim nx_{n+1} = 1$.

Or $\lim x_{n+1} = 0$, d'où $\lim (n+1)x_{n+1} = 1$.

Ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} nx_n = 1.$$

2. (a) Posons $l = \lim x_n$, alors $\lim (x_{n+1} - x_n) = l - l = 0$.

Donc la suite $(x_{n+1} - x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

(b) i. Posons : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = x_{n+1} - x_n$.

Alors, comme $\lim u_n = l$, on a, d'après le théorème de Césaro : $\lim v_n = l$.

Or, soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_{k+1} - x_k) = \frac{1}{n} (x_{n+1} - x_1),$$

par somme télescopique.

Ainsi : $\lim \frac{1}{n} (x_{n+1} - x_1) = l$.

Or $\lim \frac{x_1}{n} = 0$, d'où $\lim \frac{x_{n+1}}{n} = l$.

De plus, $\lim \frac{n}{n+1} = 1$ donc, par produit : $\lim \frac{x_{n+1}}{n+1} = l$.

Donc :

$$\lim \frac{x_n}{n} = l.$$

ii. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $x_n = \frac{x_n}{n} \cdot n$.

Or $\lim \frac{x_n}{n} = l \neq 0$ et $\lim n = +\infty$ donc :

$$\lim x_n = \begin{cases} +\infty & \text{si } l > 0 \\ -\infty & \text{si } l < 0. \end{cases}$$

iii. Posons : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \ln n$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$x_{n+1} - x_n = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right).$$

Donc $\lim (x_{n+1} - x_n) = 0$ et (x_n) diverge.

Ainsi, dans le cas où $l = 0$, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'est pas nécessairement convergente.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k = \frac{1}{n} \frac{-1 + (-1)^{n+1}}{1 - (-1)} = \frac{-1 + (-1)^{n+1}}{2n}.$$

Ainsi, comme $(-1 + (-1)^{n+1})$ est bornée et $\lim \frac{1}{2n} = 0$, on a :

$$\lim v_n = 0.$$

(b) On a (v_n) qui converge et (u_n) qui n'a pas de limite. Ainsi la réciproque du théorème de Césaro est fausse.

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, comme (u_n) est croissante, on a :

$$\sum_{k=n+1}^{2n} u_k \geq \sum_{k=n+1}^{2n} u_{n+1} = (2n - (n+1) + 1) u_{n+1} = n u_{n+1}.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} u_k = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{2n} u_k - \sum_{k=1}^n u_k \right) = \frac{1}{n} (2n v_{2n} - n v_n) = 2v_{2n} - v_n.$$

- (c)
- (v_n) est convergente donc bornée, ainsi $(2v_{2n} - v_n)$ est bornée. Donc (u_n) est majorée.
 - (u_n) est croissante et majorée donc (u_n) converge.
 - Posons $l = \lim u_n$, alors, d'après le théorème de Césaro, $\lim v_n = l$ donc :

$$\lim u_n = \lim v_n.$$

- (d) On a montré que si (u_n) est croissante, alors la réciproque du théorème de Césaro est vraie.



Correction de la séance 6

Polynômes de Tchebychev



✚ ✚ Exercice de calcul (Chapitre 8, exemple 18)

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2$.
Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$,

$$\frac{x+1}{4x^2-4x+1} = \frac{1}{8} \frac{8x-4}{4x^2-4x+1} + \frac{3}{2} \frac{1}{4x^2-4x+1} = \frac{1}{8} \frac{8x-4}{4x^2-4x+1} + \frac{3}{4} \frac{2}{(2x-1)^2}$$

Ainsi une primitive de $x \mapsto \frac{x+1}{4x^2-4x+1}$ est $x \mapsto \frac{1}{8} \ln(4x^2 - 4x + 1) - \frac{3}{4} \frac{1}{2x-1}$ et les primitives de $x \mapsto \frac{x+1}{4x^2-4x+1}$ sont :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} \frac{1}{8} \ln(4x^2 - 4x + 1) - \frac{3}{4} \frac{1}{2x-1} + \lambda_1 & \text{si } x \in]-\infty, \frac{1}{2}[\\ \frac{1}{8} \ln(4x^2 - 4x + 1) - \frac{3}{4} \frac{1}{2x-1} + \lambda_2 & \text{si } x \in -\frac{1}{2}, +\infty[\end{cases} \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

⊙ Inégalité

Soit $n \in \mathbb{N}$. f_n est dérivable sur $[0, 1]$ et : $\forall x \in [0, 1]$, $f'_n(x) = \frac{n(1+n^2x^4) - nx \cdot 4n^2x^3}{(1+n^2x^4)^2} = \frac{n-3n^3x^4}{(1+n^2x^4)^2} = \frac{n(1-3n^2x^4)}{(1+n^2x^4)^2}$.

Donc f_n est croissante sur $\left[0, \sqrt[4]{\frac{1}{3n^2}}\right]$ et décroissante sur $\left[\sqrt[4]{\frac{1}{3n^2}}, +\infty\right[$.

Ainsi, soit $x \in [0, 1]$,

$$|f_n(x)| \leq f_n\left(\sqrt[4]{\frac{1}{3n^2}}\right).$$

Or : $f_n\left(\sqrt[4]{\frac{1}{3n^2}}\right) = \frac{n \sqrt[4]{\frac{1}{3n^2}}}{1 + \frac{n^2}{3n^2}} = \frac{3}{4\sqrt[4]{3}} \sqrt{n}$. Donc $c = \frac{3}{4\sqrt[4]{3}}$ convient.



Exercice 14 (Chapitre 15, exercice 12)

Pour tout $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$, on note $\text{dom}(P)$ son coefficient dominant.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $\deg(T_n) = n$ et $\text{dom}(T_n) = 2^{n-1}$. »

Montrons par récurrence d'ordre 2 que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

- Pour $n = 1$, $T_1 = X$ donc $\deg(T_1) = 1$ et $\text{dom}(T_1) = 1 = 2^0$.

Pour $n = 2$, $T_2 = 2X^2 - 1$ donc $\deg(T_2) = 2$ et $\text{dom}(T_2) = 2 = 2^{2-1}$. Ainsi $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$ sont vraies.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies.
On a $T_{n+2} = 2X T_{n+1} - T_n$ donc $\deg(T_{n+2}) = \deg(2X T_{n+1} - T_n)$.
Or, $\deg(T_n) = n$, $\deg(2X T_{n+1}) = \deg(2X) + \deg(T_{n+1}) = \deg(X) + \deg(T_{n+1}) = n+2$
donc $\deg(T_n) < \deg(2X T_{n+1})$.
Ainsi, $\deg(T_{n+2}) = \max(\deg(2X T_{n+1}), \deg(T_n)) = \deg(2X T_{n+1}) = n+2$.
De plus, comme $\deg(T_n) < \deg(2X T_{n+1})$, le coefficient dominant de T_{n+2} est celui du polynôme $2X T_{n+1}$.
D'où $\text{dom}(T_{n+2}) = \text{dom}(2X T_{n+1}) = 2 \text{dom}(T_{n+1}) = 2 \times 2^n = 2^{n+1}$.
Ainsi, $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.
- Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\deg(T_n) = n$ et $\text{dom}(T_n) = 2^{n-1}$.

De plus, on a : $\deg(T_0) = 0$ et $\text{dom}(T_0) = 1$.

2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $\mathcal{Q}(n)$: « $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$. »

Montrons par récurrence d'ordre 2 que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{Q}(n)$ est vraie.

- Pour $n = 0$, $T_0(\cos(\theta)) = 1 = \cos(0\theta)$.
Pour $n = 1$, $T_1(\cos(\theta)) = \cos(\theta)$.
Ainsi, $\mathcal{Q}(0)$ et $\mathcal{Q}(1)$ sont vraies.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\mathcal{Q}(n)$ et $\mathcal{Q}(n+1)$ sont vraies.

$$\begin{aligned}
 T_{n+2}(\cos(\theta)) &= 2 \cos(\theta) T_{n+1}(\cos(\theta)) - T_n(\cos(\theta)) \\
 &\stackrel{HR}{=} 2 \cos(\theta) \cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta) \\
 &= 2 \cos(\theta) (\cos(n\theta) \cos(\theta) - \sin(n\theta) \sin(\theta)) - \cos(n\theta) \\
 &= \cos(n\theta) (2 \cos(\theta)^2 - 1) - \sin(n\theta) (2 \cos(\theta) \sin(\theta)) \\
 &= \cos(n\theta) \cos(2\theta) - \sin(n\theta) \sin(2\theta) \\
 &= \cos((n+2)\theta)
 \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{Q}(n+2)$ est vraie.

- On a donc prouvé par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{Q}(n)$ est vraie.

Montrons désormais l'unicité.

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que : $\forall \theta \in \mathbb{R}, P(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.

On a alors : $\forall \theta \in \mathbb{R}, P(\cos(\theta)) = T_n(\cos(\theta))$.

Donc : $\forall \theta \in \mathbb{R}, (P - T_n)(\cos(\theta)) = 0$. Or, $\cos : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ est surjective.

Ainsi : $\forall x \in [-1, 1], (P - T_n)(x) = 0$.

Donc $P - T_n$ admet une infinité de racines (distinctes). C'est donc le polynôme nul.

On a donc $P = T_n$. Ainsi, T_n est bien l'unique polynôme vérifiant l'égalité souhaitée.

3. T_0 n'admet aucune racine.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminons les racines de T_n .

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
 T_n(\cos(\theta)) = 0 &\iff \cos(n\theta) = 0 \\
 &\iff n\theta \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \\
 &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, n\theta = \frac{\pi}{n} + k\pi \\
 &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{\frac{\pi}{n} + k\pi}{n} \\
 &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{(2k+1)\pi}{2n}
 \end{aligned}$$

Ainsi, les $\left(\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n} \right) \right)$ avec $k \in [0, n-1]$ sont des racines de T_n .

Soit $k \in [0, n-1]$, on a $1 \leq 2k+1 \leq 2n-1$. D'où : $0 \leq \frac{\pi}{2n} \leq \frac{(2k+1)\pi}{2n} \leq \pi - \frac{\pi}{2n} < \pi$.

De plus, la fonction $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ est injective. Ainsi, pour tout $k \in [0, n-1]$, les $\left(\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n} \right) \right)$ sont deux à deux distincts. On a ainsi obtenu n racines distinctes pour T_n de degré n . On a donc déterminé toutes les racines de T_n .



Problème 4 (DM9, d'après Centrale PC 2022)

1. Polynômes de Lagrange

(a) Soient $i, k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

- Si $k = i$, $L_i(a_k) = \prod_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}} \frac{a_i - a_j}{a_i - a_j} = 1$.
- Si $k \neq i$, il existe $j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}$ tel que $a_k - a_j = 0$ donc $L_i(a_k) = 0$.

Ainsi :

$$L_i(a_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(b) Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, posons $Q = P - \sum_{i=1}^n P(a_i) L_i$.

- On a $\deg(P) \leq n-1$ et $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\deg(L_i) = n-1$.
Donc $\deg(Q) \leq n-1$.
- Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\begin{aligned} Q(a_k) &= P(a_k) - \sum_{i=1}^n P(a_i) L_i(a_k) \\ &= P(a_k) - P(a_k) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, Q admet au moins n racines distinctes.

- Donc $Q = 0$, d'où : $P = \sum_{i=1}^n P(a_i) L_i$.

(c) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\deg(P) \leq n-2$.

On a $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, donc : $P = \sum_{i=1}^n P(a_i) L_i$ (*).

Le coefficient en X^{n-1} dans L_i est $\frac{1}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (a_i - a_j)}$ et le coefficient en X^{n-1} dans P est 0 donc en égalisant les coefficients

en X^{n-1} dans (*), on obtient :

$$0 = \sum_{i=1}^n \frac{P(a_i)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (a_i - a_j)}.$$

2. Polynômes de Tchebychev

(a) $(1+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ et $(1-1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k$.

En sommant, on obtient :

$$2^n = \sum_{k=0}^n \left(1 + (-1)^k\right) \binom{n}{k}.$$

Or, $1 + (-1)^k = \begin{cases} 2 & \text{si } k \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$

Donc :

$$2^n = \sum_{\substack{k \in [0, n] \\ k \text{ pair}}} 2 \binom{n}{k}.$$

D'où, en posant $k = 2p$:

$$2^n = 2 \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p}.$$

Donc :

$$2^{n-1} = \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p}.$$

- (b) Soit $p \in \left[0, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right]$, $X^{n-2p}(1-X^2)^p$ est un polynôme de degré $n-2p+2p=n$ de coefficient dominant $(-1)^p$.

Donc par combinaison linéaire, $\deg(T_n) \leq n$ et le coefficient en X^n dans T_n est

$$\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^p \binom{n}{2p} (-1)^p = \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p} = 2^{n-1} \neq 0.$$

Ainsi, $\deg(T_n) = n$ et le coefficient dominant de T_n est 2^{n-1} .

- (c) • Soit $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \cos(n\theta) &= \operatorname{Re}(e^{in\theta}) = \operatorname{Re}\left((e^{i\theta})^n\right) \\ &= \operatorname{Re}\left((\cos\theta + i\sin\theta)^n\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (i\sin\theta)^k (\cos\theta)^{n-k}\right) \end{aligned}$$

Or : $i^k \in \mathbb{R}$ si k est pair et $i^k \in i\mathbb{R}$ si k est impair. Donc :

$$\begin{aligned} \cos(n\theta) &= \sum_{\substack{k \in \llbracket 0, n \rrbracket \\ k \text{ pair}}} i^k \binom{n}{k} \cos^{n-k}(\theta) \sin^k \theta \\ &= \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} i^{2p} \binom{n}{2p} \cos^{n-2p}(\theta) \sin^{2p} \theta \\ &= \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^p \binom{n}{2p} \cos^{n-2p}(\theta) \sin^{2p}(\theta) \\ &= \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^p \binom{n}{2p} \cos^{n-2p}(\theta) (1 - \cos^2 \theta)^p \\ &= T_n(\cos(\theta)) \end{aligned}$$

T_n vérifie bien la relation.

- Unicité :

Soit $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall \theta \in \mathbb{R}, Q_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.

Alors : $\forall \theta \in \mathbb{R}, (T_n - Q_n)(\cos(\theta)) = 0$.

Or : $\cos : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ est surjectif. Ainsi : $\forall x \in [-1, 1], (T_n - Q_n)(x) = 0$.

Donc $T_n - Q_n$ admet une infinité de racines distinctes. Donc $T_n - Q_n = 0$.

Ainsi $T_n = Q_n$.

- Ainsi T_n est l'unique polynôme tel que : $\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.

- (d) Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\begin{aligned} T_n(x_k) &= T_n\left(\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)\right) \\ &= \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2}\right) \\ &= \cos\left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, x_k est racine de T_n . De plus, $\frac{(2k-1)\pi}{2n} \in [0, \pi]$ et $\cos : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ est injectif. Donc les x_k sont deux à deux distincts.

Ainsi, $x_1, \dots, x_n$ sont n racines de T_n qui est de degré n . Donc T_n est scindé et son coefficient dominant est 2^{n-1} .

$$\text{Donc } T_n = 2^{n-1} \prod_{k=1}^n (X - x_k).$$

3. Une première inégalité

- (a) • en utilisant la question 2.c, $\sup_{x \in [-1, 1]} |T_n(x)| = \sup_{\theta \in \mathbb{R}} |T_n(\cos\theta)| = \sup_{\theta \in \mathbb{R}} |\cos(n\theta)|$ car $\{\cos\theta, \theta \in \mathbb{R}\} = [-1, 1]$.

$$\text{Ainsi : } \sup_{x \in [-1, 1]} |T_n(x)| = 1.$$

- Posons $W = \frac{1}{2^{n-1}} T_n$ alors $\deg(W) = \deg(T_n) = n$ et W est unitaire.

$$\text{De plus, } \sup_{x \in [-1,1]} |W(x)| = \frac{1}{2^{n-1}} \sup_{x \in [-1,1]} |T_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Donc $W = \frac{1}{2^{n-1}} T_n$ vérifie l'égalité.

- (b) • $\deg(T_n) = n$ et $\deg W = n$, donc $\deg(Q) \leq n$.
 • Le coefficient en X^n dans Q est $\frac{1}{2^{n-1}} 2^{n-1} - 1 = 0$

Donc $\deg(Q) \leq n - 1$

- (c) i. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$\begin{aligned} Q(z_k) &= \frac{1}{2^{n-1}} T_n(z_k) - W(z_k) \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} T_n\left(\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) - W(z_k) \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \cos(k\pi) - W(z_k) \quad \text{avec la question 2.c} \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} (-1)^k - W(z_k) \end{aligned}$$

$$\text{Or : } -\frac{1}{2^{n-1}} < W(z_k) < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Donc :

- si k est pair $Q(z_k) = \frac{1}{2^{n-1}} - W(z_k) > 0$.
 - si k est impair $Q(z_k) = -\frac{1}{2^{n-1}} - W(z_k) < 0$.
- ii. Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, la fonction polynomiale associée à Q est continue sur $]z_{k+1}, z_k[$ et 0 est compris entre $Q(z_k)$ et $Q(z_{k+1})$ donc d'après le TVI, il existe $c_k \in]z_{k+1}, z_k[$ tel que : $Q(c_k) = 0$.
 iii. On a $z_n < c_{n-1} < z_{n-1} < \dots < z_1 < c_0 < z_0$ donc $c_0, \dots, c_{n-1}$ sont n racines distinctes de Q .
 Or, $\deg(Q) \leq n - 1$, donc $Q = 0$.

$$\text{Ainsi : } W = \frac{1}{2^{n-1}} T_n \text{ ce qui est absurde car } \sup_{x \in [-1,1]} |W(x)| < \frac{1}{2^{n-1}} = \sup_{x \in [-1,1]} \left| \frac{T_n(x)}{2^{n-1}} \right|.$$

$$\text{Ainsi : } \sup_{x \in [-1,1]} |W(x)| \geq \frac{1}{2^{n-1}} \text{ et (1) est prouvée.}$$

- (d) i. • Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, de même qu'à la question 1.c.i $Q(z_k) \geq 0$ si k est pair et $Q(z_k) \leq 0$ si k est impair.
 • Soit $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $(z_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est décroissante par décroissance de $\cos$ sur $[0, \pi]$. Donc $z_k - z_j > 0$ si $k < j$ et $z_k - z_j < 0$ si $k > j$.

Donc $\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n (z_k - z_j)$ est le produit de k termes négatifs ($j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$) et de $n-k$ termes positifs ($j \in \llbracket k+1, n \rrbracket$).

Ainsi, ce produit a même signe que $(-1)^k \times 1^{n-k} = (-1)^k$.

Donc ce produit est positif si k est pair et négatif si k est impair.

- Par produit $\frac{Q(z_k)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n (z_k - z_j)} \geq 0$.

- ii. En appliquant 1.c à $n+1$, aux points $z_0, \dots, z_n$ et au polynôme Q qui vérifie $\deg(Q) \leq (n+1) - 2 = n-1$, on a :

$$\sum_{k=0}^n \frac{Q(z_k)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n (z_k - z_j)} = 0.$$

Or, il s'agit d'une somme de nombres positifs, donc :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \frac{Q(z_k)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n (z_k - z_j)} = 0.$$

Donc : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, Q(z_k) = 0$.

Ainsi Q admet au moins $n+1$ racines distinctes $(z_0, \dots, z_n)$ et $\deg(Q) \leq n-1$.

$$\text{Donc } Q = 0 \text{ et } W = \frac{1}{2^{n-1}} T_n.$$

$$\text{On a donc égalité dans (1) ssi } W = \frac{T_n}{2^{n-1}}.$$

Equations fonctionnelles



Exercice de calcul (Chapitre 7, exemple 12)

Posons :

$$A_n = \sum_{k=0}^n \cos(kt) \text{ et } B_n = \sum_{k=1}^n \sin(kt).$$

• On a $A_n = \sum_{k=0}^n \operatorname{Re}(e^{ikt}) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^n e^{ikt}\right)$ et $B_n = \sum_{k=0}^n \operatorname{Im}(e^{ikt}) = \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^n e^{ikt}\right).$

• On a :

$$\sum_{k=0}^n e^{ikt} = \sum_{k=0}^n (e^{it})^k$$

Donc :

– si $e^{it} = 1$, c'est-à-dire si $t \equiv 0 [2\pi]$, alors :

$$\sum_{k=0}^n e^{ikt} = \sum_{k=0}^n 1 = n+1$$

Donc :

$$A_n = n+1 \text{ et } B_n = 0.$$

– si $e^{it} \neq 1$, c'est-à-dire si $t \not\equiv 0 [2\pi]$, alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n e^{ikt} &= \frac{1 - (e^{it})^{n+1}}{1 - e^{it}} = \frac{e^{i\frac{(n+1)t}{2}} \left(e^{-i\frac{(n+1)t}{2}} - e^{i\frac{(n+1)t}{2}} \right)}{e^{i\frac{t}{2}} \left(e^{-i\frac{t}{2}} - e^{i\frac{t}{2}} \right)} = \frac{e^{i\frac{(n+1)t}{2}}}{e^{i\frac{t}{2}}} \frac{-2i \sin \frac{(n+1)t}{2}}{-2i \sin \frac{t}{2}} \\ &= e^{i\frac{nt}{2}} \frac{\sin \frac{(n+1)t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \end{aligned}$$

Donc :

$$A_n = \operatorname{Re} \left(e^{i\frac{nt}{2}} \frac{\sin \frac{(n+1)t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right) = \frac{\cos \frac{nt}{2} \sin \frac{(n+1)t}{2}}{\sin \frac{t}{2}}$$

et

$$B_n = \operatorname{Im} \left(e^{i\frac{nt}{2}} \frac{\sin \frac{(n+1)t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right) = \frac{\sin \frac{nt}{2} \sin \frac{(n+1)t}{2}}{\sin \frac{t}{2}}$$



Inégalité

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$.

$$|f_n(x) - x| = \left| \frac{nx^3}{1+nx^2} - x \right| = \left| \frac{x}{1+nx^2} \right| = \frac{|x|}{1+nx^2}.$$

Or :

- si $|x| > \frac{1}{\sqrt{n}}$, alors $1 + nx^2 > nx^2 > 0$ donc :

$$|f_n(x) - x| \leq \frac{1}{n|x|} \leq \frac{1}{\sqrt{n}},$$

- si $|x| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$, alors :

$$|f_n(x) - x| \leq |x| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Posons : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f_n(x) - x| \leq u_n$ et $\lim u_n = 0$ donc (u_n) convient.



Problème 5 (Problème supplémentaire 15-1)

1. En appliquant l'hypothèse à $x = y = 0$, on a : $f(0) = f(0) + f(0) + 0$ donc :

$$f(0) = 0.$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. En appliquant l'hypothèse à x et $-x$, on a : $f(x-x) = f(x) + f(-x) - x^2$ donc, comme $f(0) = 0$:

$$f(-x) = -f(x) + x^2.$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Pour $n = 0$, $f(nx) = f(0) = 0$ et $nf(x) - \frac{1}{2}nx^2 + \frac{1}{2}n^2x^2 = 0$ donc :

$$f(nx) = nf(x) - \frac{1}{2}nx^2 + \frac{1}{2}n^2x^2.$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que $f(nx) = nf(x) - \frac{1}{2}nx^2 + \frac{1}{2}n^2x^2$. On a :

$$\begin{aligned}
 f((n+1)x) &= f(nx+x) \\
 &= f(nx) + f(x) + nx.x \quad \text{par hypothèse sur } f \\
 &= nf(x) - \frac{1}{2}nx^2 + \frac{1}{2}n^2x^2 + f(x) + nx^2 \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\
 &= (n+1)f(x) + \frac{1}{2}nx^2 + \frac{1}{2}n^2x^2 \\
 &= (n+1)f(x) - \frac{1}{2}(n+1)x^2 + \frac{1}{2}(2n+1)x^2 + \frac{1}{2}n^2x^2 \\
 &= (n+1)f(x) - \frac{1}{2}(n+1)x^2 + \frac{1}{2}(2n+1+n^2)x^2 \\
 &= (n+1)f(x) - \frac{1}{2}(n+1)x^2 + \frac{1}{2}(n+1)^2x^2
 \end{aligned}$$

- Donc, par récurrence :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, f(nx) = nf(x) - \frac{1}{2}nx^2 + \frac{1}{2}n^2x^2.$$

4. Soient $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$.

- si $n \in \mathbb{N}$, le résultat est vrai d'après 3.

- si $n < 0$, alors $-n \in \mathbb{N}$ donc, d'après 3. :

$$f(-nx) = -nf(x) + \frac{1}{2}nx^2 + \frac{1}{2}n^2x^2.$$

Or, d'après 2. $f(-nx) = -f(nx) + n^2x^2$. Ainsi :

$$-f(nx) + n^2x^2 = -nf(x) + \frac{1}{2}nx^2 + \frac{1}{2}n^2x^2.$$

Donc :

$$f(nx) = nf(x) - \frac{1}{2}nx^2 + \frac{1}{2}n^2x^2.$$

- Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, f(nx) = nf(x) - \frac{1}{2}nx^2 + \frac{1}{2}n^2x^2.$$

5. Soit $x \in \mathbb{Q}$. Il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que : $x = \frac{p}{q}$.

D'après 4 :

$$f(qx) = qf(x) - \frac{1}{2}qx^2 + \frac{1}{2}q^2x^2.$$

Or :

$$f(qx) = f(p) = f(p.1) = pf(1) - \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}p^2.$$

Donc :

$$qf(x) - \frac{1}{2}qx^2 + \frac{1}{2}q^2x^2 = pf(1) - \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}p^2.$$

Donc :

$$qf(x) - \frac{1}{2}\frac{p^2}{q} + \frac{1}{2}\cancel{p^2} = pf(1) - \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\cancel{p^2}.$$

Donc :

$$qf(x) = pf(1) - \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}\frac{p^2}{q}.$$

Ainsi :

$$f(x) = \frac{p}{q}f(1) - \frac{1}{2}\frac{p}{q} + \frac{1}{2}\frac{p^2}{q^2} = xf(1) - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2.$$

Donc :

$$\forall x \in \mathbb{Q}, f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + f(1)x.$$

6. • Posons $\lambda = f(1) - \frac{1}{2}$, alors :

$$\forall x \in \mathbb{Q}, f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \lambda x.$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe (x_n) suite de rationnels telle que $\lim x_n = x$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, comme $x_n \in \mathbb{Q}$, alors :

$$f(x_n) = \frac{1}{2}x_n^2 + \lambda x_n.$$

Comme f est continue, $\lim f(x_n) = f(x)$ donc, par passage à la limite :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \lambda x.$$

- Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \lambda x.$$

7. • Analyse : Supposons qu'il existe $f \in C^0(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + f(y) + xy.$$

D'après les questions précédentes, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \lambda x.$$

- Synthèse : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, posons $f : x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + \lambda x$. Alors $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ et, soient $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) + f(y) + xy &= \frac{1}{2}x^2 + \lambda x + \frac{1}{2}y^2 + \lambda y + xy \\ &= \frac{1}{2}(x^2 + 2xy + y^2) + \lambda(x + y) \\ &= \frac{1}{2}(x + y)^2 + \lambda(x + y) \\ &= f(x + y) \end{aligned}$$

Donc f convient.

- Donc les solutions sont :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{2}x^2 + \lambda x, \quad \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$



Problème 6 (Problème supplémentaire 15-2)

Première méthode :

1. Soit f la fonction constante nulle.

Il est clair que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ et que f vérifie (1). Ainsi $f \in E$.

Donc :

$$E \neq \emptyset$$

2.
 - Comme f est définie et continue sur $\mathbb{R}$, il est clair que g l'est également.
 - Soient $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g(x) + g(y) &= f(x) - f(0) + f(y) - f(0) \\ &= f(x) + f(y) - 2f(0) \\ &= 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) - 2f(0) \\ &= 2\left(f\left(\frac{x+y}{2}\right) - f(0)\right) \\ &= 2g\left(\frac{x+y}{2}\right) \end{aligned}$$

Ainsi g vérifie (1).

- D'où :

$$g \in E$$

3. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. En prenant $y = -x$ dans (1), on a :

$$f(x) + f(-x) = 2f(0) = 0.$$

Donc :

$$f(-x) = -f(x).$$

Ainsi f est impaire.

- (b) Soit $x \in \mathbb{R}$, en prenant $y = x + 2$ dans (1), on a :

$$f(x) + f(x+2) = 2f\left(\frac{x+x+2}{2}\right) = 2f(x+1).$$

Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x+2) = 2f(x+1) - f(x)$$

- (c)
 - Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = f(n)$$

Alors, comme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(n+2) = 2f(n+1) - f(n),$$

on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n.$$

Le polynôme caractéristique associé à cette relation est :

$$X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2.$$

Ainsi, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda + \mu n.$$

Or $u_0 = f(0) = 0$, ainsi $\lambda = 0$.

Et $u_1 = f(1) = a$, ainsi $\mu = a$.

D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = u_n = an.$$

- Soit $m \in \mathbb{Z}$ tel que $m < 0$.

Comme f est impaire, on a :

$$f(m) = -f(-m)$$

Et comme $-m \in \mathbb{N}$, on a, d'après le point précédent :

$$f(-m) = a(-m).$$

Donc :

$$f(m) = -a(-m) = am.$$

- On a alors :

$$\forall m \in \mathbb{Z}, f(m) = am.$$

- (d) • Soit $x \in \mathbb{R}$, en prenant $y = 0$ dans (1), on a :

$$f(x) = 2f\left(\frac{x}{2}\right)$$

Donc :

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}f(x)$$

- Pour $p = 0$,

$$f\left(\frac{1}{2^p}\right) = f(1) = a = \frac{a}{2^p}$$

- Soit $p \in \mathbb{N}$, supposons que :

$$f\left(\frac{1}{2^p}\right) = \frac{a}{2^p}.$$

On a :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2^{p+1}}\right) &= f\left(\frac{1/2^p}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2^p}\right) && \text{d'après le premier point} \\ &= \frac{1}{2} \frac{a}{2^p} && \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{a}{2^{p+1}} \end{aligned}$$

- On a donc prouvé par récurrence que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, f\left(\frac{1}{2^p}\right) = a \frac{1}{2^p}.$$

- (e) Soit $n \in \mathbb{Z}$, montrons par récurrence sur p que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, f\left(\frac{n}{2^p}\right) = \frac{1}{2^p}f(n).$$

- Pour $p = 0$,

$$f\left(\frac{n}{2^p}\right) = f(n) = \frac{1}{2^p}f(n)$$

- Soit $p \in \mathbb{N}$, supposons que :

$$f\left(\frac{n}{2^p}\right) = \frac{1}{2^p}f(n).$$

On a :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{n}{2^{p+1}}\right) &= f\left(\frac{n/2^p}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}f\left(\frac{n}{2^p}\right) && \text{d'après le premier point} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{2^p}f(n) && \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{1}{2^{p+1}}f(n) \end{aligned}$$

- On a donc prouvé par récurrence que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, f\left(\frac{n}{2^p}\right) = \frac{1}{2^p} f(n).$$

- Soient $n \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{N}$, comme d'après 3.(c), $f(n) = an$, on a :

$$f\left(\frac{n}{2^p}\right) = \frac{1}{2^p} f(n) = \frac{1}{2^p} an = a \frac{n}{2^p}.$$

- On a ainsi, par définition de D :

$$\forall x \in D, f(x) = ax.$$

- (f) i. Soit $n \in \mathbb{N}$, comme $\lfloor 2^n x_0 \rfloor \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$, alors :

$$u_n = \frac{\lfloor 2^n x_0 \rfloor}{n} \in D$$

Ainsi, (u_n) est à valeurs dans D .

- ii. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\lfloor 2^n x_0 \rfloor \leq 2^n x_0 < \lfloor 2^n x_0 \rfloor + 1$$

Donc :

$$\frac{\lfloor 2^n x_0 \rfloor}{2^n} \leq x_0 < \frac{\lfloor 2^n x_0 \rfloor}{2^n} + \frac{1}{2^n}$$

Ainsi :

$$u_n \leq x_0 < u_n + \frac{1}{2^n}.$$

D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_0 - \frac{1}{2^n} < u_n \leq x_0.$$

De plus :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_0 - \frac{1}{2^n} = x_0,$$

donc, par théorème d'encadrement, (u_n) converge et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = x_0.$$

- iii. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = x_0$ et f est continue en x_0 , on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(x_0).$$

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in D$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(u_n) = au_n$$

Ainsi :

$$f(x_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} au_n$$

Donc :

$$f(x_0) = ax_0.$$

- (g) • Soit $f \in E$, soit g définie comme à la question 2, alors $g \in E$ et $g(0) = 0$, donc d'après les question précédente, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = ax$$

De plus, comme : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x) + f(0)$, il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax + b.$$

- Réciproquement, posons :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax + b,$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Alors f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ et de plus, soient $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) + f(y) &= ax + b + ay + b \\ &= a(x + y) + 2b \\ &= 2\left(a \frac{x+y}{2} + b\right) \\ &= 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) \end{aligned}$$

Ainsi f vérifie (1).

Donc $f \in E$.

- On a donc :

$$E = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax + b \end{array} \right., a, b \in \mathbb{R} \}$$

Seconde méthode :

4. Soit $x \in [0, 1]$,

- Si $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, alors $0 \leq 2x \leq 1$ donc $2x \in [0, 1]$.
- Si $\frac{1}{2} < x \leq 1$, alors $1 < 2x \leq 2$ donc $2x - 1 \in [0, 1]$.
- On a donc :

$$\forall x \in [0, 1], 2x \in [0, 1] \text{ ou } 2x - 1 \in [0, 1].$$

5. (a) f est continue sur le segment $[0, 1]$ donc f est bornée et atteint ses bornes.
Ainsi il existe $c, d \in [0, 1]$ tels que :

$$f(c) = \max_{[0,1]} f \text{ et } f(d) = \min_{[0,1]} f.$$

On a alors :

$$\forall x \in [0, 1], f(d) \leq f(x) \leq f(c).$$

(b) • On applique (1) à $x = 2c \in [0, 1]$ et $y = 0$. On a alors :

$$f(2c) + f(0) = 2f(c)$$

Or $f(2c) \leq f(c)$ donc :

$$2f(c) \leq f(0) + f(c)$$

D'où :

$$f(c) \leq f(0).$$

De plus, d'après 5.(a), $f(0) \leq f(c)$, donc :

$$f(0) = f(c).$$

- On applique (1) à $x = 2d \in [0, 1]$ et $y = 0$. On a alors :

$$f(2d) + f(0) = 2f(d)$$

Or $f(2d) \geq f(d)$ donc :

$$2f(d) \geq f(0) + f(d)$$

D'où :

$$f(d) \geq f(0).$$

De plus, d'après 5.(a), $f(0) \geq f(d)$, donc :

$$f(0) = f(d).$$

- On a donc :

$$f(c) = f(d) = f(0).$$

- Comme :

$$\forall x \in [0, 1], f(d) \leq f(x) \leq f(c),$$

on a : f est constante.

(c) • Si $c \in [\frac{1}{2}, 1]$, on applique (1) à $x = 2c - 1 \in [0, 1]$ et $y = 1$. On a alors :

$$f(2c - 1) + f(1) = 2f(c)$$

Or $f(2c - 1) \leq f(c)$ donc :

$$2f(c) \leq f(1) + f(c)$$

D'où :

$$f(c) \leq f(1).$$

De plus, d'après 5.(a), $f(1) \leq f(c)$, donc :

$$f(1) = f(c).$$

- Si $d \in [\frac{1}{2}, 1]$, on applique (1) à $x = 2d - 1 \in [0, 1]$ et $y = 1$. On a alors :

$$f(2d - 1) + f(1) = 2f(d)$$

Or $f(2d - 1) \geq f(d)$ donc :

$$2f(d) \geq f(1) + f(d)$$

D'où :

$$f(d) \geq f(1).$$

De plus, d'après 5.(a), $f(1) \geq f(d)$, donc :

$$f(1) = f(d).$$

- Comme on a, $f(0) = f(1)$, on a donc, dans tous les cas :

$$f(c) = f(d).$$

- Comme :

$$\forall x \in [0, 1], f(d) \leq f(x) \leq f(c),$$

on a : f est constante.

6. • Soient $x, y \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} h(x) + h(y) &= f(x) - (f(1) - f(0))x + f(y) - (f(1) - f(0))y \\ &= f(x) + f(y) - (f(1) - f(0))(x + y) \\ &= 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) - (f(1) - f(0))(x + y) \\ &= 2\left(f\left(\frac{x+y}{2}\right) - (f(1) - f(0))\frac{x+y}{2}\right) \\ &= 2h\left(\frac{x+y}{2}\right) \end{aligned}$$

Donc h vérifie (1).

- Comme f est continue sur $[0, 1]$, h l'est également, on a alors :

$$h \in E'$$

- On a :

$$h(0) = f(0)$$

et

$$h(1) = f(1) - (f(1) - f(0)) = f(0) = h(0)$$

Donc h vérifie les hypothèses de la question 5, donc h est constante.

7. • Soit $f \in E'$, alors, d'après la question précédente, il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in [0, 1], f(x) - (f(1) - f(0))x = b$$

Ainsi, il existe $a \in \mathbb{R}$, tel que :

$$\forall x \in [0, 1], f(x) = ax + b$$

- De même que pour la question 3, s'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in [0, 1], f(x) = ax + b$$

alors $f \in E'$.

- On a donc :

$$E' = \left\{ \begin{array}{ll} [0, 1] & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto ax + b \end{array} \right\}, a, b \in \mathbb{R}$$



Déterminants



Exercice de calcul (Chapitre 16, exemple 8)



1.

$$\begin{aligned}
 \frac{\cos x}{1 + \sin x} &\underset{0}{=} \frac{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)}{1 + x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)} \\
 &\underset{0}{=} \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \left(1 - x + \frac{x^3}{6} + (x - \frac{x^3}{6})^2 - (x - \frac{x^3}{6})^3\right) + o(x^3) \\
 &\underset{0}{=} \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \left(1 - x + \frac{x^3}{6} + x^2 - x^3\right) + o(x^3) \\
 &\underset{0}{=} \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \left(1 - x + x^2 - \frac{5x^3}{6}\right) + o(x^3) \\
 &\underset{0}{=} 1 - x + x^2 - \frac{5x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3) \\
 &\underset{0}{=} 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)
 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
 \frac{x^2}{\operatorname{sh}^2 x} &\underset{0}{=} \frac{x^2}{(x + \frac{x^3}{6} + o(x^4))^2} \\
 &\underset{0}{=} \frac{1}{(1 + \frac{x^2}{6} + o(x^3))^2} \\
 &\underset{0}{=} (1 + \frac{x^2}{6} + o(x^3))^{-2} \\
 &\underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{3} + o(x^3)
 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\frac{e^x - 1 - x}{\ln(1+x)} &\underset{0}{=} \frac{\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)}{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)} \\
&\underset{0}{=} x \times \frac{\frac{1}{2} + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{24} + o(x^2)}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)} \\
&\underset{0}{=} x \left(\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{24} \right) \left(1 - \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} \right) + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} \right)^2 \right) + o(x^2) \right) \\
&\underset{0}{=} x \left(\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{24} \right) \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{4} \right) + o(x^2) \right) \\
&\underset{0}{=} x \left(\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{24} \right) \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} \right) + o(x^2) \right) \\
&\underset{0}{=} x \left(\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} \right) x + \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{12} - \frac{1}{24} \right) x^2 + o(x^2) \right) \\
&\underset{0}{=} x \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{12} x + \frac{1}{12} x^2 + o(x^2) \right) \\
&\underset{0}{=} \frac{1}{2} x + \frac{5}{12} x^2 + \frac{1}{12} x^3 + o(x^3)
\end{aligned}$$

Inégalité

Soit $(x, t) \in [a, b] \times [0, 1]$, on a : $\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \frac{-2x(1+t^2)e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} = -2xe^{-x^2(1+t^2)}$. Donc :

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right| = 2xe^{-x^2(1+t^2)} \leq 2x \leq 2b.$$



Exercice 15 (Chapitre 24, exemple 8)

Pour tout $n \geq 2$, on note :

$$\mathcal{P}(n) : \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}, V(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Montrons par récurrence que pour tout $n \geq 2$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

- pour $n = 2$: soient $x_1, x_2 \in \mathbb{K}$, $V(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$.

Or, $\prod_{1 \leq i < j \leq 2} (x_j - x_i) = x_2 - x_1$.

Ainsi, $\mathcal{P}(2)$ est vraie.

- Soit $n \geq 2$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
Soient $x_1, \dots, x_{n+1} \in \mathbb{K}$.

$$V(x_1, \dots, x_{n+1}) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \dots & x_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

Pour tout k allant de $n+1$ à 2 et dans cet ordre, on effectue $C_k \leftarrow C_k - x_1 C_{k-1}$. Le déterminant est inchangé. Ainsi :

$$V(x_1, \dots, x_{n+1}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2(x_2 - x_1) & \dots & x_2^{n-1}(x_2 - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} - x_1 & x_{n+1}(x_{n+1} - x_1) & \dots & x_{n+1}^{n-1}(x_{n+1} - x_1) \end{vmatrix}$$

En développant suivant la première ligne, on obtient :

$$V(x_1, \dots, x_{n+1}) = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2(x_2 - x_1) & \dots & x_2^{n-1}(x_2 - x_1) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{n+1} - x_1 & x_{n+1}(x_{n+1} - x_1) & \dots & x_{n+1}^{n-1}(x_{n+1} - x_1) \end{vmatrix}$$

Par linéarité du déterminant par rapport à chacun des lignes, on obtient :

$$\begin{aligned} V(x_1, \dots, x_{n+1}) &= \prod_{j=2}^{n+1} (x_j - x_1) \times \begin{vmatrix} 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & \dots & x_{n+1}^{n-1} \end{vmatrix} \\ &= \prod_{j=2}^{n+1} (x_j - x_1) V(x_2, \dots, x_{n+1}) \\ &= \prod_{j=2}^{n+1} (x_j - x_1) \prod_{2 \leq i < j \leq n+1} (x_j - x_i) \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (x_j - x_i) \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- On a donc prouvé par récurrence que pour tout $n \geq 2$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.



Problème 7 (Problème (donnée en cours) : Déterminants et produits scalaires)

Partie 1 :

$$1. \quad G(u, v) = \begin{vmatrix} (u|u) & (u|v) \\ (v|u) & (v|v) \end{vmatrix} = (u|u)(v|v) - (u|v)(v|u) = \|u\|^2 \|v\|^2 - (u|v)^2$$

Or, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|(u|v)| \leq \|u\| \|v\|$$

$$\text{Donc } (u|v)^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2.$$

Donc :

$$G(u, v) \geq 0$$

$$\bullet \quad G(u, 0) = 0 \Leftrightarrow (u|v)^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 \Leftrightarrow |(u|v)| = \|u\| \|v\|.$$

Donc, d'après le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$G(u, v) = 0$ ssi u et v sont colinéaires.

$$2. \quad (a) \quad \text{On a } (u|w) = (v|w) = 0 \text{ Donc :}$$

$$G(u, v, w) = \begin{vmatrix} \|u\|^2 & (u|v) & 0 \\ (u|v) & \|v\|^2 & 0 \\ 0 & 0 & \|w\|^2 \end{vmatrix} = \|w\|^2 \begin{vmatrix} \|u\|^2 & (u|v) \\ (u|v) & \|v\|^2 \end{vmatrix}$$

$$\text{Donc } G(u, v, w) = \|w\|^2 G(u, v).$$

(b) Il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $w = \lambda u + \mu v$.

$$G(u, v, w) = \begin{vmatrix} (u|u) & (u|v) & (u|w) \\ (v|u) & (v|v) & (v|w) \\ (\lambda u + \mu v|u) & (\lambda u + \mu v|v) & (\lambda u + \mu v|w) \end{vmatrix}$$

En utilisant la linéarité par rapport à la dernière ligne :

$$G(u, v, w) = \lambda \begin{vmatrix} (u|u) & (u|v) & (u|w) \\ (v|u) & (v|v) & (v|w) \\ (u|u) & (u|v) & (u|w) \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} (u|u) & (u|v) & (u|w) \\ (v|u) & (v|v) & (v|w) \\ (v|u) & (v|v) & (v|w) \end{vmatrix}$$

Or les 1^{ère} et 3^{ème} lignes du premier déterminant sont égales et les 2^{ème} et 3^{ème} lignes du second déterminant sont égales.

Donc : $G(u, v, w) = 0$.

(c)

$$G(u, v, w) = \begin{vmatrix} (u|u) & (u|v) & (u|t) \\ (v|u) & (v|v) & (v|t) \\ (t|u) & (t|v) & (n|n) + (t|t) \end{vmatrix}$$

car $(t|n) = (n|t) = 0$ et $(u|n) = (v|n)$.

En utilisant la linéarité par rapport à la dernière colonne :

$$\begin{aligned} a(u, v, w) &= \begin{vmatrix} (u|u) & (u|v) & (u|t) \\ (v|u) & (v|v) & (v|t) \\ (t|u) & (t|v) & (t|t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (u|u) & (u|v) & 0 \\ (v|u) & (v|v) & 0 \\ (t|u) & (t|v) & (n|n) \end{vmatrix} \\ &= G(u, v, t) + \|n\|^2 G(u, v) \end{aligned}$$

Or, d'après 2.b $G(u, v, t) = 0$, donc :

$$G(u, v, w) = \|n\|^2 G(u, v).$$

- (d)
- Comme $\text{Vect}(u, v) \oplus \text{Vect}(u, v)^\perp = E$, tout vecteur w est de la forme de la question précédente.
 - Si (u, v, w) libre, alors u et v sont non colinéaires. Donc $G(u, v) \neq 0$ d'après 1.
De plus, si $n = 0$, alors $w = t \in \text{Vect}(u, v)$. Donc (u, v, w) liée.
Donc $n \neq 0$, ainsi $\|n\| \neq 0$.
Donc $G(u, v, w) \neq 0$
 - Si $G(u, v, w) \neq 0$, alors $G(u, v) \neq 0$ et $\|n\|^2 \neq 0$. " Si (u, v, w) liée, alors il existe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0$ et $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq (0, 0, 0)$
 - Si $\lambda_3 = 0$, alors $\lambda_1 u + \lambda_2 v = 0$.
Or $G(u, v) \neq 0$ donc u et v non colinéaires donc $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ce qui est absurde.
 - On a donc $\lambda_3 \neq 0$. Donc $w = -\frac{\lambda_1 u + \lambda_2 v}{\lambda_3}$. Ainsi w est combinaison linéaire de u et v .
D'où $w = t$ et $n = 0$ ce qui contredit $\|n\|^2 \neq 0$.
Donc (u, v, w) libre.

Ainsi (u, v, w) libre ssi $G(u, v, w) \neq 0$.

Partie 2 :

1. Il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$ tel que :

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j u_j = 0.$$

Donc : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n \lambda_j (u_i | 1_j) = 0$.

Posons C_1, C_n les colonnes de $\text{Gram}(u_1, \dots, u_n)$.

Alors : $\sum_{j=1}^n \lambda_j C_j = 0$, donc $(C_1, \dots, C_n)$ liée.

Donc $\text{rg}(\text{Gram}(u_1, \dots, u_n)) < n$.

Ainsi $\text{Gram}(u_1, \dots, u_n)$ n'est pas inversible.

D'où $G(u_1, \dots, u_n) = 0$.

2. (a) Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

$$u_j = \sum_{k=1}^n a_{k,j} e_k.$$

Donc :

$$\begin{aligned}
 (u_i | u_j) &= \left(\sum_{l=1}^n a_{l,i} e_l \mid \sum_{k=1}^n a_{k,j} e_k \right) \\
 &= \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n a_{l,i} a_{k,j} (e_l | e_k) \\
 &= \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n a_{l,i} a_{k,j} \delta_{l,k} \\
 &= \sum_{k=1}^n a_{k,i} a_{k,j}
 \end{aligned}$$

D'où :

$$(u_i | u_i) = \sum_{k=1}^n a_{k,i} a_{k,j}.$$

(b) Posons $A^T \cdot A = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ Soient $i, j \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$m_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{k,i} a_{k,j} = (u_i | u_j)$$

Donc :

$$A^T \cdot A = \text{Gram}(u_1, \dots, u_n).$$

(c)

$$G(u, \cdot, u_n) = \det(A^T \cdot A) = \det(A^T) \cdot \det(A) = \det(A)^2.$$

Comme A est une matrice de passage, $A \in GL_n(\mathbb{R})$ donc $\det A \neq 0$. Ainsi $G(u_1, \dots, \mu_n) > 0$.

3. (a) Voir cours.

(b) •

$$G(e_1, \dots, e_p, x) = G(e_1, \dots, e_p, x_F + n) = \begin{vmatrix} (e_1 | e_1) & \cdots & (e_1 | e_p) & (e_p | x_F) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (e_p | e_1) & \cdots & (e_p | e_p) & (e_p | x_F) \\ (x_F | e_1) & \cdots & (x_F | e_p) & \|x_F\|^2 + \|n\|^2 \end{vmatrix}$$

$$\text{car } (x | x) = (x_F + n | x_F + n) = \|x_F\|^2 + 2(n | x_F) + \|n\|^2 = \|x_F\|^2 + \|n\|^2.$$

En utilisant la linéarité par rapport à la dernière colonne :

$$\begin{aligned}
 G(e_1, \dots, e_p, x) &= \begin{vmatrix} (e_1 | e_1) & \cdots & (e_1 | e_p) & (e_p | x_F) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (e_p | e_1) & \cdots & (e_p | e_p) & (e_p | x_F) \\ (x_F | e_1) & \cdots & (x_F | e_p) & \|x_F\|^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (e_1 | e_1) & \cdots & (e_1 | e_p) & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (e_p | e_1) & \cdots & (e_p | e_p) & 0 \\ (x_F | e_1) & \cdots & (x_F | e_p) & \|n\|^2 \end{vmatrix} \\
 &= G(e_1, \dots, e_p, x_F) + \|n\|^2 G(e_1, \dots, e_p)
 \end{aligned}$$

Or $(e_1, \dots, e_p, x_F)$ est liée, donc, d'après 1 : $G(e_1, \dots, e_p, x_F) = 0$. Ainsi :

$$G(e_1, \dots, e_p, x_F) = \|n\|^2 G(e_1, \dots, e_p).$$

• Comme $(e_1, \dots, e_p)$ est libre, $G(e_1, \dots, e_p) \neq 0$ donc :

$$\|n\|^2 = \frac{G(e_1, \dots, e_p, x)}{G(e_1, \dots, e_p)}.$$

Donc, comme $d(x, F) = \|x\|$, on a :

$$d(x, F) = \sqrt{\frac{G(e_1, \dots, e_p, x)}{G(e_1, \dots, e_p)}}$$

Partie 3 :

1. • φ est clairement bilinéaire et symétrique.

- Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ $\varphi(P, P) = \int_0^1 P(t)^2 dt \geq 0$ et $\varphi(P, P) = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 P(t)^2 dt = 0$, or P^2 est continue et positive donc :

$$\varphi(P, P) = 0 \Leftrightarrow \forall t \in [0, 1], P(t) = 0 \Leftrightarrow P = 0$$

car P admet une infinité de racines.

- Ainsi φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2. (a)

$$\begin{aligned} d &= \inf_{P \in \mathbb{R}_1[X]} \int_0^1 (t^2 - P(t))^2 dt \\ &= \lim_{P \in \mathbb{R}_1[X]} \|x^2 - P\|^2 \\ &= d(X^2, \mathbb{R}_1[X])^2 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{cc} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{array} \right| &= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \\ \left| \begin{array}{ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{array} \right| &= \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{24} - \frac{1}{27} - \frac{1}{16} - \frac{1}{20} \\ &= \dots = \frac{1}{2160} \end{aligned}$$

(c) $(1, X)$ est une base de $\mathbb{R}_1[X]$, donc, d'après II.3.b, $d = \frac{G(1, X, X^2)}{G(1, X)}$. Or :

$$\begin{aligned} (1 | 1) &= 1 & (X | X^2) &= \frac{1}{4} \\ (1 | X) &= \frac{1}{2} & (X | X) &= \frac{1}{3} \\ (1 | X^2) &= \frac{1}{3} & (X^2 | X^2) &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } G(1, X) = \left| \begin{array}{cc} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{array} \right| = \frac{1}{12}$$

$$G(1, X, X^2) = \left| \begin{array}{ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{array} \right| = \frac{1}{2160}$$

Donc :

$$d = \frac{\frac{1}{2160}}{\frac{1}{12}} = \frac{1}{180}.$$

Limites d'intégrales



Exercice de calcul (Chapitre 25, exemple 11)

- $\|1\| = \sqrt{\int_0^1 t \cdot 1^2 dt} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$
Posons $f_1 = \sqrt{2}.$
- $g_1 = X - (X|f_1)f_1 = X - 2 \int_0^1 t \cdot t dt = X - \frac{2}{3}.$

$$\begin{aligned} \|X - \frac{2}{3}\| &= \sqrt{\int_0^1 t \cdot (t - \frac{2}{3})^2 dt} \\ &= \sqrt{\int_0^1 (t^3 - \frac{4}{3}t^2 + \frac{4}{9}t) dt} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{36}} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Posons $f_2 = 6(X - \frac{2}{3}).$

- (f_1, f_2) est l'orthonormalisation de la base canonique.



Inégalité

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^+.$ On a :

- si $x \leq 1, |f_n(x)| = \frac{x^n}{x^{n+2} + 1} \leq x^n \leq 1,$
- si $x > 1, |f_n(x)| = \frac{x^n}{x^{n+2} + 1} \leq \frac{x^n}{x^{n+2}} \leq \frac{1}{x^2}.$

Posons $g : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } x > 1. \end{cases}$ Alors g est continue sur $\mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^+, |f_n(x)| \leq g(x)$ et $g(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$ donc g convient.



Exercice 16 (Chapitre 18, exemple 1)

f est continue sur le segment $[0, 1]$ ainsi, d'après le théorème des bornes atteintes, il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que : $\forall x \in [0, 1], |f(x)| \leq M.$

Ainsi, soit $n \in \mathbb{N},$

$$\left| \int_0^1 t^n f(t) dt \right| \leq \int_0^1 t^n |f(t)| dt \leq \int_0^1 t^n M dt \leq \frac{M}{n+1}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{M}{n+1} = 0$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 t^n f(t) dt = 0.$$



Exercice 17 (Chapitre 18, exemple 2)

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$.

On effectue l'intégration par parties :

$$\begin{aligned} u(t) &= f(t) & u'(t) &= f'(t) \\ v'(t) &= \sin(nt) & v(t) &= -\frac{1}{n} \cos(nt) \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) \sin(nt) dt &= \left[-\frac{f(t) \cos(nt)}{n} \right]_a^b + \frac{1}{n} \int_a^b f'(t) \cos(nt) dt \\ &= -\frac{f(b) \cos(nb) + f(a) \cos(na)}{n} + \frac{1}{n} \int_a^b f'(t) \cos(nt) dt \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\left| \int_a^b f(t) \sin(nt) dt \right| \leq \frac{|f(b)| + |f(a)|}{n} + \frac{1}{n} \int_a^b |f'(t)| dt \leq \frac{|f(b)| + |f(a)| + \int_a^b |f'(t)| dt}{n}.$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{|f(b)| + |f(a)| + \int_a^b |f'(t)| dt}{n} \right) = 0$ donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \sin(nt) dt = 0.$$



Exercice 18 (Chapitre 18, exemple 3)

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt = \int_x^{2x} \frac{e^t - 1}{t} dt + \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt = \int_x^{2x} \frac{e^t - 1}{t} dt + \ln 2.$$

Or $\frac{e^t - 1}{t} = 1 + o(1)$ et, soit F une primitive de $t \mapsto \begin{cases} \frac{e^t - 1}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$, on a :

$$F(x) = F(0) + x + o(x).$$

Donc : $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = 0$. Or

$$\int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt = F(x) - F(0) + \ln 2.$$

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt = \ln 2.$$



Exercice 19 (Chapitre 18, exercice 10)

Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la limite de f en $+\infty$, il existe $A \geq 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, x \geq A \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $x \geq A$

$$\begin{aligned} |F(x) - l| &= \left| \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt - l \right| \\ &= \left| \frac{1}{x} \int_0^x (f(t) - l) dt \right| \\ &= \left| \frac{1}{x} \int_0^A (f(t) - l) dt + \frac{1}{x} \int_A^x (f(t) - l) dt \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{x} \int_0^A (f(t) - l) dt \right| + \left| \frac{1}{x} \int_A^x (f(t) - l) dt \right| \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{x} \int_A^x (f(t) - l) dt \right| &\leq \left| \frac{1}{x} \int_A^x |f(t) - l| dt \right| \\ &\leq \frac{1}{|x|} \left| \int_A^x \varepsilon dt \right| \\ &\leq \varepsilon \frac{|x - A|}{|x|} \\ &\leq \varepsilon \frac{x - A}{x} \quad \text{car } x \geq A \text{ et } x > 0 \\ &\leq \varepsilon \frac{x}{x} \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

De plus, $\left| \int_0^A (f(t) - l) dt \right|$ est une constante (ne dépend pas de x). Ainsi, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \int_0^A (f(t) - l) dt \right| \frac{1}{|x|} = 0$.

Donc il existe $B \geq 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, x \geq B \implies \left| \frac{1}{x} \int_0^A (f(t) - l) dt \right| \leq \varepsilon.$$

Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, x \geq \max(A, B) \implies |F(x) - l| \leq 2\varepsilon$$

Finalement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = l$.



Probabilités, espérance et variance



Exercice de calcul (Chapitre 9, exemple 14)

Soit y deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Posons $z : x \mapsto e^{x^2} y(x)$ alors z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et, soit $x \in \mathbb{R}$,

$$z'(x) = e^{x^2} (2xy(x) + y'(x)) \text{ et } z''(x) = e^{x^2} ((4x^2 + 2)y(x) + 4xy'(x) + y''(x))$$

Ainsi :

$$y'' + 4xy' + (3 + 4x^2)y = 0 \Leftrightarrow z'' + z = 0.$$

L'équation caractéristique associée à $z'' + z = 0$ est $r^2 + 1 = 0$ qui a pour racines $\pm i$ donc les solutions de $z'' + z = 0$ sont : $z : x \mapsto \lambda \cos x + \mu \sin x$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Ainsi, les solutions de $y'' + 4xy' + (3 + 4x^2)y = 0$ sont :

$$x \mapsto \frac{\lambda \cos x + \mu \sin x}{e^{x^2}}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$



Inégalité

Soit $(x, t) \in [a, +\infty[\times \mathbb{R}^{+*}$, on a : $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -e^{-xt} \sin t$. Donc :

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq e^{-xt} \leq e^{-at}.$$

Posons $g : t \mapsto e^{-at}$ alors g convient.



Exercice 20 (Chapitre 23, exemple 2)

1. Comme $((X_i = 0), (X_i = 1))$ est un système complet d'événements, on a :

$$\begin{aligned} P(X_{i+1} = 1) &= P(X_{i+1} = 1 | X_i = 0)P(X_i = 0) + P(X_{i+1} = 1 | X_i = 1)P(X_i = 1) \\ &= 1 \cdot P(X_i = 0) + \frac{1}{2}P(X_i = 1) \quad \text{par hypothèses} \\ &= 1 - P(X_i = 1) + \frac{1}{2}P(X_i = 1) \\ &= 1 - \frac{1}{2}P(X_i = 1) \end{aligned}$$

2. Soit $l \in \mathbb{R}$, on a : $l = 1 - \frac{1}{2}l \Leftrightarrow l = \frac{2}{3}$ et, soit $i \in \llbracket 1, 364 \rrbracket$,

$$P(X_{i+1} = 1) - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2} \left(P(X_i = 1) - \frac{2}{3} \right).$$

Ainsi :

$$P(X_i = 1) - \frac{2}{3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{i-1} \left(P(X_1 = 1) - \frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{i-1} \left(P(X_1 = 1) - \frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{i-1} \frac{1}{3}.$$

Donc :

$$X_i \sim \mathcal{B}\left(\frac{2}{3} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{i-1} \frac{1}{3}\right)$$

3. On a : $X = \sum_{i=1}^{365} X_i$ donc :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^{365} E(X_i) = \sum_{i=1}^{365} \left(\frac{2}{3} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{i-1} \times \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{2}{3} \cdot 365 + \frac{1}{3} \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{365}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{2}{3} \cdot 365 + \frac{2}{9} \left(-\frac{1}{2}\right)^{365} \end{aligned}$$



Exercice 21 (Chapitre 23, exemple 11)

Posons $Y_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$, on a $E(Y_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i$ donc, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P(|Y_n - E(Y_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(Y_n)}{\varepsilon^2}.$$

Ainsi :

$$1 - \frac{V(Y_n)}{\varepsilon^2} \leq P(|Y_n - E(Y_n)| < \varepsilon) \leq 1.$$

De plus, comme $X_1, \dots, X_n$ sont deux à deux indépendantes :

$$V(Y_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(X_i) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n p_i(1 - p_i) \leq \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n 1 \leq \frac{1}{n}.$$

Donc :

$$1 - \frac{1}{n\varepsilon^2} \leq P(|Y_n - E(Y_n)| < \varepsilon) \leq 1.$$

Ainsi, par théorème d'encadrement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i\right| < \varepsilon\right) = 1.$$



Exercice 22 (Chapitre 23, exercice 6)

1. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note F_i l'événement : « Obtenir face au i -ème lancer. »

- $X_2(\Omega) = \{0, 1\}$.

On a :

$$P(X_2 = 0) = P(F_2 \cap F_1) \cup (\overline{F_1} \cap \overline{F_2}) = P(F_2 \cap F_1) + P(\overline{F_2} \cap \overline{F_1}) = P(F_1)P(F_2) + P(\overline{F_1})P(\overline{F_2}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

car les événements $F_1 \cap F_2$, $\overline{F_1} \cap \overline{F_2}$ sont incompatibles et les deux tirages sont indépendants.

De plus $P(X_2 = 0) + P(X_2 = 1) = 1$, ainsi :

$$P(X_2 = 1) = \frac{1}{2}.$$

X_2 suit donc la loi uniforme sur $\{0, 1\}$.

On a :

$$E(X_2) = 0 \times P(X_2 = 0) + 1 \times P(X_2 = 1) = \frac{1}{2}.$$

$$V(X_2) = E(X_2^2) - E(X_2)^2 = 0^2 P(X_2 = 0) + 1^2 P(X_2 = 1) - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

- On a $X_3(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

On a :

$$\begin{aligned} P(X_3 = 2) &= P((\overline{F_1} \cap F_2 \cap \overline{F_3}) \cup (F_1 \cap \overline{F_2} \cap F_3)) \\ &= P(\overline{F_1} \cap F_2 \cap \overline{F_3}) + P(F_1 \cap \overline{F_2} \cap F_3) \\ &= P(\overline{F_1})P(F_2)P(\overline{F_3}) + P(F_1)P(\overline{F_2})P(F_3) \\ &= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} P(X_3 = 0) &= P((F_1 \cap F_2 \cap F_3) \cup (\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap \overline{F_3})) \\ &= P(F_1 \cap F_2 \cap F_3) + P(\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap \overline{F_3}) \\ &= P(F_1)P(F_2)P(F_3) + P(\overline{F_1})P(\overline{F_2})P(\overline{F_3}) \\ &= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\text{Enfin, } P(X_3 = 1) = 1 - P(X_3 = 0) - P(X_3 = 2) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Par suite,

$$E(X_3) = 0 \times P(X_3 = 0) + 1 \times P(X_3 = 1) + 2 \times P(X_3 = 2) = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} = 1.$$

Et :

$$V(X_3) = E(X_3^2) - E(X_3)^2 = 0^1 P(X_3 = 0) + 1^2 P(X_3 = 1) + 2^2 P(X_3 = 2) - 1 = \frac{1}{2} + \frac{4}{4} - 1 = \frac{1}{2}.$$

2. Soit $n \geq 2$, X_n représente le gain à la suite de $n - 1$ parties. Ce gain est donc entre 0 et $n - 1$. Ainsi, $X_n(\Omega) = \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$.

On a :

$$\begin{aligned} P(X_n = 0) &= P((F_1 \cap \dots \cap F_n) \cup (\overline{F_1} \cap \dots \cap \overline{F_n})) \\ &= P(F_1 \cap \dots \cap F_n) + P(\overline{F_1} \cap \dots \cap \overline{F_n}) \quad \text{par incompatibilité} \\ &= P(F_1) \dots P(F_n) + P(\overline{F_1}) \dots P(\overline{F_n}) \quad \text{par indépendance des différents tirages} \\ &= \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} \\ &= \frac{1}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

On a :

$$P(X_n = n - 1) = P((F_1 \cap \overline{F_2} \cap F_3 \dots) \cup (\overline{F_1} \cap F_2 \cap \overline{F_3} \dots)) = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

3. $(X_n = l)_{l \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket}$ forme un système complet d'événements.

Ainsi, par la formule des probabilités totales, on a :

$$P(X_{n+1} = k) = \sum_{l=0}^{n-1} P(X_{n+1} = k | X_n = l) P(X_n = l)$$

On a $P(X_{n+1} = k | X_n = k) = \frac{1}{2}$ (puisque'il faut faire au $(n+1)$ -ième jet le même résultat que le jet précédent) et $P(X_{n+1} = k | X_n = k-1) = \frac{1}{2}$ (puisque'il faut faire au $(n+1)$ -ième jet le résultat opposé au jet précédent).

Si $l \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \setminus \{k, k-1\}$, $P(X_{n+1} = k | X_n = l) = 0$. (car entre le n -ième et le $(n+1)$ -ème lancer on ne peut que gagner 0 ou 1 point).

Ainsi, l'égalité devient :

$$P(X_{n+1} = k) = P(X_{n+1} = k | X_n = k-1) P(X_n = k-1) + P(X_{n+1} = k | X_n = k) P(X_n = k) = \frac{1}{2} P(X_n = k-1) + \frac{1}{2} P(X_n = k).$$

4. (a) • On a $Q_n(1) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X_n = k) = 1$ (puisque $((X_n = k))_{k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket}$ forme un système complet d'événements).
 • On a : $\forall s \in \mathbb{R}, Q'_n(s) = \sum_{k=1}^{n-1} k P(X_n = k) s^{k-1}$.

Donc :

$$Q'_n(1) = \sum_{k=1}^{n-1} k P(X_n = k) = \sum_{k=0}^{n-1} k P(X_n = k) = E(X_n).$$

- De plus : $\forall s \in \mathbb{R}, Q''_n(s) = \sum_{k=2}^{n-1} k(k-1) P(X_n = k) s^{k-2}$.

Ainsi :

$$Q''_n(1) = \sum_{k=2}^{n-1} k(k-1) P(X_n = k) = \sum_{k=0}^{n-1} k(k-1) P(X_n = k) = \sum_{k=0}^{n-1} k^2 P(X_n = k) - \sum_{k=0}^{n-1} k P(X_n = k) = E(X_n^2) - E(X_n).$$

Ainsi :

$$V(X_n) = Q''_n(1) + E(X_n) - E(X_n)^2 = Q''_n(1) + Q'_n(1) - Q'_n(1)^2.$$

- (b) Soit $s \in \mathbb{R}$. On a, par les questions 2 et 3,

$$\begin{aligned} Q_{n+1}(s) &= \sum_{k=0}^n P(X_{n+1} = k) s^k \\ &= P(X_{n+1} = 0) s^0 + P(X_{n+1} = n) s^n + \sum_{k=1}^{n-1} P(X_{n+1} = k) s^k \\ &= \frac{1}{2^n} + \frac{s^n}{2^n} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} (P(X_n = k) + P(X_n = k-1)) s^k \\ &= \frac{1}{2} P(X_n = 0) + \frac{1}{2} P(X_n = n-1) s^n + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} P(X_n = k) s^k + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-2} P(X_n = k) s^{k+1} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} P(X_n = k) s^k + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} P(X_n = k) s^{k+1} \\ &= \frac{(1+s)}{2} Q_n(s) \end{aligned}$$

- (c) Soit $s \in \mathbb{R}$. On remarque alors que $(Q_n(s))_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}}$ est géométrique.

Ainsi : $\forall n \geq 2, Q_n(s) = \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-2} Q_2(s)$, avec $Q_2(s) = P(X_2 = 0) + P(X_2 = 1) s = \frac{1+s}{2}$ par la question 1.

Ainsi : $\forall s \in \mathbb{R}, \forall n \geq 2, Q_n(s) = \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-1}$.

- (d) Soit $s \in \mathbb{R}$. On a :

$$Q'_n(s) = \frac{n-1}{2} \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-2} \quad \text{et} \quad Q''_n(s) = \frac{(n-1)(n-2)}{4} \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-3}.$$

On a alors :

$$E(X_n) = Q'_n(1) = \frac{n-1}{2}.$$

Et :

$$V(X_n) = Q_n''(1) + Q_n'(1) - Q_n'(1)^2 = \frac{(n-1)(n-2)}{4} + \frac{n-1}{2} - \frac{(n-1)^2}{4} = \frac{n-1}{4}(n-2+2-n+1) = \frac{n-1}{4}.$$



Compléments sur les séries numériques



Exercice de calcul (Chapitre 7, exemple 25)

Soit $z \in \mathbb{C}$, posons $Z = z^3$, on a :

$$\begin{aligned} z^6 - 2iz^3 - 2 &= 0 \Leftrightarrow Z^2 - 2iZ - 2 = 0 \Leftrightarrow Z = \frac{2i \pm \sqrt{4}}{2} \Leftrightarrow Z = i \pm 1 \Leftrightarrow Z = \sqrt{2}e^{i\pi/4} \text{ ou } Z = \sqrt{2}e^{3i\pi/4} \\ \Leftrightarrow z^3 &= \sqrt{2}e^{i\pi/4} \text{ ou } z^3 = \sqrt{2}e^{3i\pi/4} \Leftrightarrow \left(\frac{z}{\sqrt[6]{2}e^{i\pi/12}}\right)^3 = 1 \text{ ou } \left(\frac{z}{\sqrt[6]{2}e^{i\pi/4}}\right)^3 = 1 \\ \Leftrightarrow \frac{z}{\sqrt[6]{2}e^{i\pi/12}} &\in \mathbb{U}_3 = \{1, e^{2i\pi/3}, e^{4i\pi/3}\} \text{ ou } \frac{z}{\sqrt[6]{2}e^{i\pi/4}} \in \mathbb{U}_3 = \{1, e^{2i\pi/3}, e^{4i\pi/3}\} \\ \Leftrightarrow z &\in \{\sqrt[6]{2}e^{i\pi/12}, \sqrt[6]{2}e^{3i\pi/4}, \sqrt[6]{2}e^{17i\pi/12}, \sqrt[6]{2}e^{i\pi/4}, \sqrt[6]{2}e^{11i\pi/12}, \sqrt[6]{2}e^{19i\pi/12}\} \end{aligned}$$



Inégalité

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [a, b]$.

$$|f_n(x)| \leq \frac{b^2}{1 + n^2 a^2}$$

Posons : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{b^2}{1 + n^2 a^2}$, alors $u_n \sim \frac{b^2}{n^2 a^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ converge donc (u_n) convient.



Exercice 23 (Chapitre 26, exercice 8)

1. (a) Supposons $l > 1$.

Soit $m \in]1, l[$. Comme $m < l$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq n_0 \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq m > 1.$$

Ainsi :

$$\forall n \geq n_0, u_{n+1} \geq u_n.$$

D'où :

$$\forall n \geq n_0, 0 < u_{n_0} \leq u_n$$

Donc, (u_n) ne converge pas vers 0 donc la série diverge grossièrement donc diverge.

(b) Supposons $l \in [0, 1[$.

Soit $M \in]l, 1[$. Comme $M > l$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq n_0 \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq M.$$

Donc :

$$\forall n \geq n_0, u_{n+1} \leq M u_n$$

Par récurrence, on montre alors que :

$$\forall n \geq n_0, 0 \leq u_n \leq M^{n-n_0} u_{n_0}$$

Or, $\sum M^n$ converge en tant que série géométrique de raison $M \in [0, 1[$.

Ainsi, par théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ converge.

2. (a) (u_n) est bien suite de réels strictement positifs.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}(\sin \alpha)^{2n+2} n^2}{(n+1)^2 2^n (\sin \alpha)^{2n}} = 2(\sin \alpha)^2 \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right)^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2(\sin \alpha)^2.$$

- Si $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right[$, $\sin \alpha \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right[$ donc $2(\sin \alpha)^2 \in [0, 1[$. Ainsi, par la règle de d'Alembert, $\sum u_n$ converge.
- Si $\alpha \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin \alpha \in \left]\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$ donc $2(\sin \alpha)^2 \in]1, 2]$. Ainsi, par la règle de d'Alembert, $\sum u_n$ diverge.
- Si $\alpha = \frac{\pi}{4}$, la règle de d'Alembert ne s'applique pas.

On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n^2}$. Ainsi $\sum u_n$ converge.

Finalement, $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{2}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{\exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)}.$$

Or, $n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim 1$ Ainsi, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{e} < 1$.

Ainsi, par la règle de d'Alembert, $\sum u_n$ converge.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n! \ln(n+1)}{(n+1)! \ln n} = \frac{\ln(n+1)}{(n+1) \ln n}.$$

Or, $\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1 + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$. Ainsi, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Donc par la règle de d'Alembert, $\sum u_n$ converge.

(d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\ln(n+1) 2^n}{2^{n+1} \ln(n)} = \frac{1}{2} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}$$

Or, $\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1 + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2} < 1$.

Donc par la règle de d'Alembert, $\sum u_n$ converge.



Exercice 24 (Chapitre 26, exercice 25)

- Soit $n \in \mathbb{N}$, $S_{2n+2} - S_{2n} = (-1)^{2n+2} u_{2n+2} - (-1)^{2n+1} u_{2n+1} = u_{2n+2} - u_{2n+1} \leq 0$ (car $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante). Ainsi, $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
 - De même, soit $n \in \mathbb{N}$, $S_{2n+3} - S_{2n+1} = (-1)^{2n+3} u_{2n+3} - (-1)^{2n+2} u_{2n+2} = -u_{2n+3} + u_{2n+2} \geq 0$ (car $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante). Donc $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

- Enfin, soit $n \in \mathbb{N}$, $S_{2n+1} - S_{2n} = (-1)^{2n+1} u_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Ainsi, les suites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.

- (b) Comme les suites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes, alors les suites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.

Ainsi, les suites extraites paires et impaires convergent vers la même limite donc $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Ainsi, $\sum (-1)^n u_n$ converge.

2. (a) • Si $\alpha \leq 0$, alors $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ diverge grossièrement.

- Si $\alpha > 1$, alors $\left| \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \right| = \frac{1}{n^\alpha}$.

Or $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est une série de Riemann convergente.

Ainsi $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge absolument donc converge.

- Si $0 \leq \alpha < 1$, alors, posons : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$. Alors (u_n) est une suite de réels strictement positifs, décroissante et convergeant vers 0, donc, d'après 1., $\sum (-1)^n u_n$ converge.

Ainsi $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge.

(b)

$$\begin{aligned} u_n &= (-1)^n \left(\exp \left(-n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right) - \frac{1}{e} \right) \\ &= (-1)^n \left(\exp \left(-n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O \left(\frac{1}{n^3} \right) \right) \right) - \frac{1}{e} \right) \\ &= (-1)^n \left(\exp \left(-1 + \frac{1}{2n} + O \left(\frac{1}{n^2} \right) \right) - \frac{1}{e} \right) \\ &= (-1)^n \left(\frac{1}{e} \exp \left(\frac{1}{2n} + O \left(\frac{1}{n^2} \right) \right) - \frac{1}{e} \right) \\ &= (-1)^n \left(\frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{2n} + O \left(\frac{1}{n^2} \right) \right) - \frac{1}{e} \right) \\ &= \frac{(-1)^n}{2en} + O \left(\frac{1}{n^2} \right) \end{aligned}$$

Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, alors $\sum u_n$ et $\sum \frac{(-1)^n}{2en}$ ont même nature.

Comme $(\frac{1}{2en})$ est une suite de réels strictement positifs, décroissante et convergeant vers 0, donc, d'après 1., $\sum \frac{(-1)^n}{2en}$ converge.

Donc $\sum u_n$ converge.

(c)

$$\begin{aligned} u_n &= \sin \left(\pi \frac{n^3 + 1}{n^2 + 1} \right) \\ &= \sin \left(\pi n \frac{1 + \frac{1}{n^3}}{1 + \frac{1}{n^2}} \right) \\ &= \sin \left(\pi n \left(1 + \frac{1}{n^3} \right) \left(1 - \frac{1}{n^2} + O \left(\frac{1}{n^3} \right) \right) \right) \\ &= \sin \left(\pi n \left(1 - \frac{1}{n^2} + O \left(\frac{1}{n^3} \right) \right) \right) \\ &= \sin \left(\pi n - \frac{\pi}{n} + O \left(\frac{1}{n^2} \right) \right) \\ &= (-1)^n \sin \left(-\frac{\pi}{n} + O \left(\frac{1}{n^2} \right) \right) \\ &= (-1)^n \left(-\frac{\pi}{n} + O \left(\frac{1}{n^2} \right) \right) \\ &= \frac{(-1)^{n+1} \pi}{n} + O \left(\frac{1}{n^2} \right) \end{aligned}$$

Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, alors $\sum u_n$ et $\sum \frac{(-1)^{n+1}\pi}{n}$ ont même nature.

Comme $(\frac{\pi}{n})$ est une suite de réels strictement positifs, décroissante et convergeant vers 0, donc, d'après 1., $\sum \frac{(-1)^{n+1}\pi}{n}$ converge.

Donc $\sum u_n$ converge.

(d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on effectue le changement de variable : $t = x - n\pi$. On a : $dt = dx$.

$$\begin{aligned} u_n &= \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x \ln x} dx \\ &= \int_0^\pi \frac{\sin(t + n\pi)}{(t + n\pi) \ln(t + n\pi)} dx \\ &= (-1)^n \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{(t + n\pi) \ln(t + n\pi)} dx \\ &= (-1)^n v_n \end{aligned}$$

avec : $v_n = \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{(t + n\pi) \ln(t + n\pi)} dx$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $t \in [0, \pi]$, alors $\sin(t) \geq 0$, $t + n\pi \geq 0$ et $\ln(t + n\pi) \geq 0$, ainsi : $v_n \geq 0$.
De plus, comme $t \mapsto \frac{\sin(t)}{(t + n\pi) \ln(t + n\pi)}$ est continue, positive et non constante nulle, alors $v_n > 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $t \in [0, \pi]$, on a $\sin(t) \geq 0$, $0 < t + n\pi \leq t + (n+1)\pi$ et $0 < \ln(t + n\pi) \leq \ln(t + (n+1)\pi)$.
Ainsi $\frac{\sin(t)}{(t + (n+1)\pi) \ln(t + (n+1)\pi)} \leq \frac{\sin(t)}{(t + n\pi) \ln(t + n\pi)}$.
Donc, par croissance de l'intégrale, $v_{n+1} \leq v_n$.
Ainsi (v_n) est décroissante.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} |v_n| &\leq \int_0^\pi \frac{1}{n\pi \ln(n\pi)} dt \\ &\leq \frac{1}{n \ln(n\pi)} \end{aligned}$$

Donc $\lim v_n = 0$.

Donc, d'après 1., $\sum (-1)^n v_n$ converge.

Donc $\sum u_n$ converge.



Exercice 25 (Chapitre 26, exemple 6)

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue décroissante et positive.

Par comparaison série-intégrale, on a donc :

$$\int_1^{n+1} \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \int_1^n \frac{dt}{t}$$

D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(n+1) \leq S_n \leq 1 + \ln n$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \leq \frac{S_n}{\ln n} \leq 1 + \frac{1}{\ln n}$$

Or, $\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1 + \frac{1}{\ln(n)} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1$.

De même, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\ln n}\right) = 1$.

Ainsi, par théorème d'encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{\ln n} = 1$.

Donc

$$S_n \sim \ln n.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \ln(n) \right) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, $u_{n+1} - u_n \sim -\frac{1}{2n^2}$.

De plus, comme $2 > 1$, la série $\sum \frac{-1}{2n^2}$ est une série de Riemann convergente et de signe constant.

Ainsi, $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge.

Donc, comme il s'agit d'une série télescopique, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

Notons $\gamma \in \mathbb{R}$ sa limite.

On obtient alors : $u_n = \gamma + o(1)$.

Donc :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1).$$



Exercice 26 (Chapitre 26, exemple 8)

- Si $\alpha < 0$: alors la série diverge grossièrement.
- Si $\alpha = 0$ et $\beta \leq 0$: alors la série diverge grossièrement.

- Si $\alpha > 1$: Posons $\gamma = \frac{1+\alpha}{2}$, on a alors $\gamma \in]1, \alpha[$.

On a :

$$\frac{n^\gamma}{n^\alpha (\ln n)^\beta} = \frac{1}{n^{\alpha-\gamma} (\ln n)^\beta} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

par croissances comparées car $\alpha - \gamma > 0$.

Donc, à partir d'un certain rang :

$$0 \leq \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \leq \frac{1}{n^\gamma}.$$

Or, comme $\gamma > 1$, la série $\sum \frac{1}{n^\gamma}$ est une série de Riemann convergente.

Par suite $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ converge.

- Si $\alpha < 1$:

Posons $\gamma = \frac{1+\alpha}{2}$, on a alors $\gamma \in]\alpha, 1[$.

Or,

$$\frac{n^\gamma}{n^\alpha (\ln n)^\beta} = \frac{n^{\gamma-\alpha}}{(\ln n)^\beta} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

par croissances comparées car $\gamma - \alpha > 0$.

Donc, à partir d'un certain rang :

$$0 \leq \frac{1}{n^\gamma} \leq \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}.$$

Or, comme $\gamma < 1$, la série $\sum \frac{1}{n^\gamma}$ est une série de Riemann divergente.

Par suite $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ diverge.

• **Si $\alpha = 1$:**

– **Si $\beta < 0$:**

On a :

$$\frac{n}{n \ln(n)^\beta} = (\ln n)^{-\beta} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Donc, à partir d'un certain rang :

$$0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n (\ln n)^\beta}.$$

Or, la série $\sum \frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente.

Par suite $\sum \frac{1}{n (\ln n)^\beta}$ diverge.

– **Si $\beta \geq 0$:**

La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t (\ln t)^\beta}$ est continue décroissante et positive sur $[2, +\infty[$.

Ainsi, par comparaison série intégrale, on a :

$$\sum \frac{1}{n (\ln n)^\beta} \text{ converge ssi } \left(\int_2^n \frac{1}{t (\ln t)^\beta} \right) \text{ converge.}$$

Si $\beta \neq 1$:

$$\forall n \geq 2, \int_2^n \frac{1}{t (\ln t)^\beta} dt = \left[\frac{1}{1-\beta} (\ln t)^{1-\beta} \right]_2^n = \frac{1}{1-\beta} \left(\frac{1}{(\ln(n))^{\beta-1}} - \frac{1}{(\ln(2))^{\beta-1}} \right).$$

Si $\beta = 1$:

$$\forall n \geq 2, \int_2^n \frac{1}{t (\ln t)^\beta} dt = [\ln(\ln t)]_2^n = \ln(\ln n) - \ln(\ln 2).$$

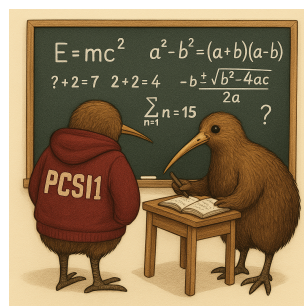
Ainsi, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_2^n \frac{1}{t (\ln t)^\beta} dt = \begin{cases} +\infty & \text{si } \beta < 1 \\ \frac{1}{1-\beta} \left(-\frac{1}{(\ln(2))^{\beta-1}} \right) & \text{si } \beta > 1 \\ +\infty & \text{si } \beta = 1 \end{cases}$$

Donc :

$$\sum \frac{1}{n (\ln n)^\beta} \begin{cases} \text{diverge} & \text{si } \beta < 1 \\ \text{converge} & \text{si } \beta > 1 \\ \text{diverge} & \text{si } \beta = 1 \end{cases}$$

En conclusion, $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou $(\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)$.



Deux thèmes : la trace et une somme de classique



Exercice de calcul (Chapitre 8, exemple 5)

Une primitive de Arctan sur $\mathbb{R}$ est $F : x \mapsto \int_0^x \text{Arctan}(t) dt$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On effectue l'intégration par parties :

$$\begin{aligned} u(t) &= \text{Arctan}(t), & u'(t) &= \frac{1}{1+t^2} \\ v'(t) &= 1 & v(t) &= t \end{aligned}$$

On a alors :

$$F(x) = [t \text{Arctan}(t)]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2} dt = x \text{Arctan}(x) - \left[\frac{1}{2} \ln(1+t^2) \right]_0^x = x \text{Arctan}(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2).$$

Ainsi, une primitive de Arctan sur $\mathbb{R}$ est : $x \mapsto x \text{Arctan}(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$.

Donc les primitives sur $\mathbb{R}$ de Arctan sont

$$x \mapsto x \text{Arctan}(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \lambda, \lambda \in \mathbb{R}.$$



Inégalité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. f_n est impaire, on l'étudie donc sur $\mathbb{R}^+$. De plus f_n est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et : $\forall x \in \mathbb{R}^+, f'_n(x) = (1-2nx^2)e^{-nx^2}$.

Donc f_n est croissante sur $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2n}}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{\sqrt{2n}}, +\infty\right[$.

Ainsi, soit $x \in \mathbb{R}$,

$$|f_n(x)| \leq f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right).$$

Posons : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2n}}$. Alors (u_n) convient.



Exercice 27 (Chapitre 12, exercice 5)

1. Soient $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{tr}(\lambda A + \mu B) &= \sum_{i=1}^n (\lambda a_{i,i} + \mu b_{i,i}) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda a_{i,i} + \sum_{i=1}^n \mu b_{i,i} \\ &= \lambda \sum_{i=1}^n a_{i,i} + \mu \sum_{i=1}^n b_{i,i} \\ &= \lambda \text{tr}(A) + \mu \text{tr}(B) \end{aligned}$$

2. Soient $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Posons $AB = (c_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $BA = (d_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(AB) &= \sum_{i=1}^n c_{i,i} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,i} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b_{k,i} a_{i,k} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n b_{k,i} a_{i,k} \\ &= \sum_{k=1}^n d_{k,k} \\ &= \operatorname{tr}(BA)\end{aligned}$$

3. • Si $A = 0_n$, alors $A^T A = 0_n$ donc $\operatorname{tr}(A^T A) = 0$.
• Supposons $\operatorname{tr}(A^T A) = 0$. Alors :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{j,i}^2 = 0.$$

Or : $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_{j,i}^2 \geq 0$. Ainsi : $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_{j,i} = 0$. Donc $A = 0_n$.

4. • Si $A = B$, alors $(\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), AM = BM)$ donc $(\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \operatorname{tr}(AM) = \operatorname{tr}(BM))$.
• Supposons $(\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \operatorname{tr}(AM) = \operatorname{tr}(BM))$. Alors : $(\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \operatorname{tr}((A - B)M) = 0$.
En particulier, pour $M = (A - B)^T$, $\operatorname{tr}((A - B)(A - B)^T) = 0$. Donc, d'après 3, $(A - B)^T = 0_n$. Ainsi $A = B$.



Exercice 28 (Chapitre 19, exercice 25)

1. Soient $M = (m_{i,j})$, $N = (n_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(\lambda M + \mu N) &= \sum_{i=1}^n (\lambda m_{i,i} + \mu n_{i,i}) \\ &= \lambda \sum_{i=1}^n m_{i,i} + \mu \sum_{i=1}^n n_{i,i} \\ &= \lambda \operatorname{tr}(M) + \mu \sum_{i=1}^n \operatorname{tr}(N)\end{aligned}$$

Donc tr est une forme linéaire.

2. Posons : $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \operatorname{tr}(M) = 0\}$. On a $F = \ker \operatorname{tr}$ et comme tr est une forme linéaire non nulle ($\operatorname{tr}(I_n) = n \neq 0$) alors F est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ donc :

$$\dim F = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) - 1 = n^2 - 1.$$



Exercice 29 (Chapitre 19, nouveau)

1. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ des bases de E . On a, en posant $P = \text{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$:

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = P \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) P^{-1}.$$

Donc, en utilisant la question 2 de l'exercice 27 :

$$\text{tr}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) = \text{tr}(P \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) P^{-1}) = \text{tr}(\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) P^{-1} P) = \text{tr}(\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f)).$$

Donc $\text{tr}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$ ne dépend pas du choix de $\mathcal{B}$ base de E .

2. D'après le théorème du rang : $\dim \ker f = \dim E - \text{rg } f = n - 1$ donc soit $(e_1, \dots, e_{n-1})$ une base de $\ker(f)$.
Comme $(e_1, \dots, e_{n-1})$ est libre, d'après le théorème de la base incomplète, il existe e_n tel que $\text{mathcal{B}} = (e_1, \dots, e_n)$ soit une base de E .

Alors :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

, avec $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$.

On a donc $\text{tr}(f) = a_n$ et :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^2) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 a_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_n^2 \end{pmatrix} = a_n \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \text{tr}(f) \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f).$$

Ainsi :

$$f^2 = \text{tr}(f) f.$$



Problème 8 (Problème supplémentaire 37)

- 1.

$$\begin{aligned} u &= 1 + e^{i\theta} = e^{i\theta/2} (e^{-i\theta/2} + e^{i\theta/2}) \\ &= 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\theta/2}. \end{aligned}$$

Donc :

- si $\theta \in [0, \pi]$, comme $\cos(\frac{\theta}{2}) > 0$ on a : $|u| = 2 \cos(\frac{\theta}{2})$ et $\frac{\theta}{2}$ est un argument de u ,
- si $\theta = \pi$, alors $u = 0$ donc $|u| = 0$ et u n'a pas d'argument,
- si $\theta \in [0, \pi]$, comme $\cos(\frac{\theta}{2}) < 0$ on a $u = -2 \cos(\frac{\theta}{2}) e^{i(\theta/2 + \pi)}$ donc : $|u| = -2 \cos(\frac{\theta}{2})$ et $\frac{\theta}{2} + \pi$ est un argument de u .

2. (a) i. • $P_1 = \frac{1}{2i} ((X+i)^3 - (X-i)^3) = \frac{1}{2i} (6iX^2 - 2i) = 3X^2 - 1$,
• $P_2 = \frac{1}{2i} ((X+i)^5 - (X-i)^5) = \frac{1}{2i} (10iX^4 - 20iX^2 + 2i) = 5X^4 - 10X^2 + 1$.
ii. • $\deg(P_1) = 2$ donc $P_1 \in \mathbb{R}_2[X]$ et le discriminant de P_1 est $\Delta = 12 \geq 0$ donc P_1 n'est pas irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.
• $\deg(P_2) = 4$ donc $P_2 \in \mathbb{R}_4[X]$ donc P_2 n'est pas irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.
(b) i. • $\deg(X+i)^{2n+1} = \deg(X-i)^{2n+1} = 2n+1$ donc $\deg P_n \leq 2n+1$.
• Le coefficient du terme en X^{2n+1} dans P_n est : $\frac{1}{2i} (1 - 1) = 0$ donc $\deg P_n \leq 2n$. Ainsi $P_n \in \mathbb{C}_{2n}[X]$.
• Le coefficient du terme en X^{2n} dans P_n est : $\frac{1}{2i} ((2n+1)i - (2n+1)(-i)) = 2n+1 \neq 0$ donc $\deg P_n = 2n$ et son coefficient dominant est $2n+1$.
ii. Les racines N -ièmes de l'unité sont :

$$e^{2ik\pi/N}, k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket.$$

- iii.

$$P_n(i) = \frac{1}{2i} (2i)^{2n+1} = (2i)^{2n} = 2^{2n} (-1)^n = (-4)^n.$$

- iv. Soit z une racine de P_n . Alors $(z+i)^{2n+1} = (z-1)^{2n+1}$ donc $|z+i| = |z-i|$.
Ainsi z est sur la médiatrice des points d'affixes i et $-i$ donc z est sur l'axe des abscisses.
Donc les racines de P_n sont réelles.
- v.

$$\begin{aligned}
P_n(a) = 0 &\iff a \neq i \text{ et } \left(\frac{a+i}{a-i}\right)^{2n+1} = 1 \\
&\iff a \neq i \text{ et } \exists k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket, \frac{a+i}{a-i} = e^{2ik\pi/(2n+1)} \\
&\iff a \neq i \text{ et } \exists k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket, a+i = (a-i)e^{2ik\pi/(2n+1)} \\
&\iff a \neq i \text{ et } \exists k \in \llbracket 0, n \rrbracket, a(1 - e^{2ik\pi/(2n+1)}) = -i(1 + e^{2ik\pi/(2n+1)})
\end{aligned}$$

Pour $k = 0$, l'équation devient : $0 = -2i$ ce qui est impossible. Ainsi, $k = 0$ n'est pas solution et i n'est pas racine de P_n .

On a donc :

$$P_n(a) = 0 \iff \exists k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket, x(1 - e^{2ik\pi/(2n+1)}) = -i(1 + e^{2ik\pi/(2n+1)}).$$

vi.

$$\begin{aligned}
P_n(a) = 0 &\iff \exists k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket, a(1 - e^{2ik\pi/(2n+1)}) = -i(1 + e^{2ik\pi/(2n+1)}) \\
&\iff \exists k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket, a = \frac{-i(1 + e^{2ik\pi/(2n+1)})}{1 - e^{2ik\pi/(2n+1)}} \\
&\iff \exists k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket, a = \frac{-ie^{ik\pi/(2n+1)}(e^{-ik\pi/(2n+1)} + e^{ik\pi/(2n+1)})}{e^{ik\pi/(2n+1)}(e^{-ik\pi/(2n+1)} - e^{ik\pi/(2n+1)})} \\
&\iff \exists k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket, a = \frac{-2i \cos\left(\frac{k\pi}{(2n+1)}\right)}{-2i \sin\left(\frac{k\pi}{(2n+1)}\right)} \\
&\iff \exists k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket, a = \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{(2n+1)}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{(2n+1)}\right)} \\
&\iff \exists k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket, a = \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{(2n+1)}\right)}
\end{aligned}$$

Ainsi les racines de P_n sont :

$$\frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{(2n+1)}\right)}, k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket,$$

qui sont réelles.

vii.

$$\begin{aligned}
P_n &= \frac{1}{2i} \left[\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} X^{2n+1-k} i^k - \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} X^{2n+1-k} (-i)^k \right] \\
&= \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} X^{2n+1-k} i^k (1 - (-1)^k) \\
&= \frac{1}{i} \sum_{\substack{k \in \llbracket 0, 2n+1 \rrbracket \\ k \text{ impair}}} \binom{2n+1}{k} X^{2n+1-k} i^k \\
&= \frac{1}{i} \sum_{p=0}^n \binom{2n+1}{2p+1} X^{2n-2p} i^{2p+1} \\
&= \sum_{p=0}^n \binom{2n+1}{2p+1} X^{2(n-p)} (-1)^p
\end{aligned}$$

Posons $Q_n = \sum_{p=0}^n \binom{2n+1}{2p+1} X^{n-p} (-1)^p$. On a :

$$Q_n(X^2) = P_{2n}(X).$$

- viii. • $P_1 = 3X^2 - 1$ donc $Q_1 = 3X - 1$ et la racine de Q_1 est $\frac{1}{3}$,
 • $P_1 = 5X^4 - 10X^2 + 1$ donc $Q_2 = 5X^2 - 10X + 1$ et les racines de Q_2 sont $\frac{10 \pm \sqrt{80}}{10} = 1 \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$.
- ix. Soit $z \in \mathbb{C}$. Soit $z' \in \mathbb{C}$ tel que $z'^2 = z$, alors :

$$Q_n(z) = 0 \Leftrightarrow Q_n(z'^2) = 0 \Leftrightarrow P_n(z') = 0.$$

Donc les racines de Q_n sont les carrés des racines de P_n .

3. Soit $k \in [1, n]$, $\frac{k\pi}{2n+1} \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Ainsi, les $\frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$ sont tous positifs et deux à deux distincts. Donc les $\frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$ sont deux à deux distincts. Ainsi, Q_n admet n racines réelles distinctes et $\deg(Q_n) = n$. Donc Q_n est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}[X]$.

De plus, S_n est la somme des racines de Q_n .

Le coefficient en dominant de Q_n vaut $\binom{2n+1}{1} = 2n+1$.

Le coefficient en X^{n-1} de Q_n vaut $\binom{2n+1}{3}(-1) = \frac{(2n+1)2n(2n-1)}{3!} = \frac{(2n+1)n(2n-1)}{3}$.

D'après les relations coefficients racines, on a :

$$S_n = -\frac{(2n+1)n(2n-1)}{3(2n+1)} = \frac{n(2n-1)}{3}.$$

4. Posons $f : x \mapsto \sin x - x$ et $g : x \mapsto \tan x - x$.

f et g sont dérivables sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Soit $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $f'(x) = \cos(x) - 1 \leq 0$ et $g'(x) = 1 + \tan^2(x) - 1 = \tan^2(x) \geq 0$.

Ainsi, f est décroissante et g est croissante sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Donc : $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $f(x) \leq f(0)$ et $g(x) \geq g(0)$.

Donc :

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

D'où :

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

Enfin : $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $0 \leq \sin x$. Soit $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a : $0 < \sin x \leq x \leq \tan x$.

Donc : $0 < \frac{1}{\tan x} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\sin x}$.

D'où : $0 < \frac{1}{\tan^2(x)} \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{\sin^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\sin^2(x)} = 1 + \frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)}$.

Or, $\cos(x) \neq 0$.

Donc $\frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)} = \frac{1}{\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}} = \frac{1}{\tan^2(x)}$.

Donc :

$$0 < \frac{1}{\tan^2(x)} \leq \frac{1}{x^2} \leq 1 + \frac{1}{\tan^2(x)}.$$

5. • Comme $2 > 1$, $\sum \frac{1}{k^2}$ est une série de Riemann convergente.
 • Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $k \in [1, n]$, $\frac{k\pi}{2n+1} \in]0, \frac{\pi}{2}[$, d'après la question précédente, on a :

$$\frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \leq \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2} \leq 1 + \frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}.$$

En sommant pour k allant de 1 à n , on obtient :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2} \leq \sum_{k=1}^n \left[1 + \frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \right].$$

Donc :

$$S_n \leq \sum_{k=1}^n \frac{(2n+1)^2}{k^2 \pi^2} \leq n + S_n.$$

D'où :

$$S_n \leq \frac{(2n+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq n + S_n.$$

Donc :

$$\frac{n(2n-1)\pi^2}{3(2n+1)^2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq \frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \left[n + \frac{n(2n-1)}{3} \right].$$

$$\text{Or, } \frac{n(2n-1)\pi^2}{3(2n+1)^2} \sim \frac{2n^2\pi^2}{3 \times 4n^2} \text{ donc } \frac{n(2n-1)\pi^2}{3(2n+1)^2} \sim \frac{\pi^2}{6} \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(2n-1)\pi^2}{3(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

$$\text{De même, } \frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \left[n + \frac{n(2n-1)}{3} \right] = \frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \times \frac{2n^2+2n}{3} \sim \frac{\pi^2 2n^2}{3 \times 4n^2}.$$

$$\text{Donc } \frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \left[n + \frac{n(2n-1)}{3} \right] \sim \frac{\pi^2}{6}. \text{ Ainsi, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \left[n + \frac{n(2n-1)}{3} \right] = \frac{\pi^2}{6}.$$

Ainsi, par encadrement :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Difficiles en algèbre linéaire

 Exercice de calcul (Chapitre 18, exemple 8)

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + e^{-k/n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right),$$

où $f : x \mapsto \frac{1}{1+e^{-x}}$ est continue sur $[0, 1]$. Donc, par sommes de Riemann :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + e^{-k/n}} &= \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx \\ &= [\ln(e^x + 1)]_0^1 = \ln(e + 1) - \ln(2) = \ln \frac{e + 1}{2}. \end{aligned}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3 + k^2 n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right),$$

où $f : x \mapsto \frac{x^2}{1+x^2}$ est continue sur $[0, 1]$. Donc, par sommes de Riemann :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3 + k^2 n} &= \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx \\ &= [x - \text{Arctan}(x)]_0^1 = 1 - \text{Arctan}(1) = 1 - \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{1}{n^2} \prod_{k=1}^n (k^2 + n^2)^{1/n} \right) &= \ln \left(\prod_{k=1}^n \left(\frac{k^2 + n^2}{n^2} \right)^{1/n} \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{k^2 + n^2}{n^2} \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(\left(\frac{k}{n} \right)^2 + 1 \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right), \end{aligned}$$

où $f : x \mapsto \ln(x^2 + 1)$ est continue sur $[0, 1]$. Donc, par sommes de Riemann :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{1}{n^2} \prod_{k=1}^n (k^2 + n^2)^{1/n} \right) = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \ln(x^2 + 1) dx.$$

Donc, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{1}{n^2} \prod_{k=1}^n (k^2 + n^2)^{1/n} \right) &= [x \ln(1 + x^2)]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2}{1 + x^2} dx = \ln(2) - 2 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1 + x^2}\right) dx \\ &= \ln(2) - 2[x - \text{Arctan}(x)]_0^1 = \ln(2) - 2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \prod_{k=1}^n (k^2 + n^2)^{1/n} = \exp(\ln(2) - 2(1 - \frac{\pi}{4})) = \frac{2}{e^{2 - \frac{\pi}{2}}}.$$

Inégalité

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} |f_n(x) - |x||^2 &= \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x| \right|^2 = x^2 + \frac{1}{n} - 2|x| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + x^2 \\ &\leq 2x^2 + \frac{1}{n} - 2|x| \sqrt{x^2} \leq \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Donc :

$$|f_n(x) - |x|| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Posons : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, |f_n(x) - |x|| \leq u_n$ et $\lim u_n = 0$ donc (u_n) convient.



Exercice 30 (Chapitre 19, exemple 9)

- On pose $G = \ker f$. Soit F un supplémentaire de G dans E , soit p la projection sur F parallèlement G .
- Soit $(e_1, \dots, e_k)$ une base de F , soit $(e_{k+1}, \dots, e_n)$ une base de G . Comme F et G sont supplémentaires dans E , alors $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E .
- Posons : $\forall j \in \llbracket 1, k \rrbracket, f_j = f(e_j)$.

Montrons que la famille $(f_1, \dots, f_k)$ est libre.

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{j=1}^k \lambda_j f_j = 0$.

Alors : $\sum_{j=1}^k \lambda_j f(e_j) = 0$ donc $f\left(\sum_{j=1}^k \lambda_j e_j\right) = 0$.

Ainsi $\sum_{j=1}^k \lambda_j e_j \in \ker f = G$.

Or $(e_1, \dots, e_k)$ une base de F donc $\sum_{j=1}^k \lambda_j e_j \in F$.

Ainsi : $\sum_{j=1}^k \lambda_j e_j \in F \cap G = \{0\}$ donc $\sum_{j=1}^k \lambda_j e_j = 0$.

Or la famille $(e_1, \dots, e_k)$ est libre, donc :

$$\forall j \in \llbracket 1, k \rrbracket, \lambda_j = 0.$$

Donc la famille $(f_1, \dots, f_k)$ est libre.

- D'après le théorème de la base incomplète, il existe $f_{k+1}, \dots, f_n \in E$ tels que $(f_1, \dots, f_n)$ soit une base de E .
- Soit g l'unique endomorphisme de E tel que :

$$\forall j \in \llbracket 1, k \rrbracket, g(e_j) = f_j.$$

Comme l'image de la base $(e_1, \dots, e_n)$ par g est une base, alors g est un isomorphisme.

Ainsi : $g \in GL(E)$.

- Montrons que $f = g \circ p$.

- Soit $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$, on a :

$$g \circ p(e_j) = g(e_j) = f_j = f(e_j)$$

car $e_j \in F$ et p projection sur F .

- Soit $j \in \llbracket k+1, n \rrbracket$, on a :

$$g \circ p(e_j) = g(0) = 0 = f(e_j)$$

car $e_j \in G$ et p projection parallèlement à G et $G = \ker f$.

- Comme $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E et $g \circ p, f \in \mathcal{L}(E)$, alors :

$$f = g \circ p.$$

- Donc g et p conviennent.



Exercice 31 (Chapitre 19, exercice 23)

- Supposons qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{Im } u = F$ et $\ker u = G$. Alors, d'après le théorème du rang :

$$n = \dim \ker u + \dim \text{Im } u = \dim F + \dim G.$$

- Supposons $\dim F + \dim G = n$.

Posons $p = \dim G$, alors $\dim F = n - p$.

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de G et $(f_1, \dots, f_{n-p})$ une base de F .

Comme $(e_1, \dots, e_p)$ est libre, d'après le théorème de la base incomplète, il existe $e_{p+1}, \dots, e_n$ tels que $(e_1, \dots, e_n)$ soit une base de E .

Soit u l'unique application de $\mathcal{L}(E)$ telle que :

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, u(e_k) = 0$$

$$\forall k \in \llbracket p+1, n \rrbracket, u(e_k) = f_{k-p}.$$

Comme $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille génératrice de E , alors $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une famille génératrice de $\text{Im } u$. Donc :

$$\text{Im } u = \text{Vect}(u(e_1), \dots, u(e_n)) = \text{Vect}(0, \dots, 0, f_1, \dots, f_{n-p}) = \text{Vect}(f_1, \dots, f_{n-p}) = F.$$

De plus :

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, e_k \in \ker u.$$

Donc, comme $\ker u$ est un espace vectoriel :

$$\text{Vect}(e_1, \dots, e_p) \subset \ker u.$$

D'après le théorème du rang : $\dim(E) = \text{rg } u + \dim(\ker u)$. Donc $\dim(\ker u) = n - \text{rg } u$.

Or $\text{Im } u = \text{Vect}(f_1, \dots, f_{n-p})$, et comme $(f_1, \dots, f_{n-p})$ est libre, $(f_1, \dots, f_{n-p})$ est une base de $\text{Im } u$. Ainsi $\text{rg } u = \dim \text{Im } u = n - p$.

Donc $\dim(\ker u) = n - (n - p) = p$.

Or $\text{Vect}(e_1, \dots, e_p) \subset \ker u$ et $\dim(\ker u) = p = \dim \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$.

Donc :

$$\ker u = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p) = G.$$

Ainsi u convient.

- Ainsi : il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{Im } u = F$ et $\ker u = G$ ssi $\dim F + \dim G = n$.



Exercice 32 (Chapitre 20, exercice 20)

- Supposons qu'il existe $P \in GL_p(\mathbb{K})$, $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ tels que $A = QJ_rP$. Alors comme P et Q sont inversibles :

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(J_rP) = \text{rg}(J_r) = r.$$

En effet, si on note $C_1, \dots, C_p$ les colonnes de J_r , on a :

$$\text{rg}(J_r) = \dim \text{Vect}(C_1, \dots, C_p) = \dim \text{Vect}(C_1, \dots, C_r) = r,$$

car $(C_1, \dots, C_r)$ car il s'agit des r premiers vecteurs de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

- Supposons que $\text{rg}(A) = r$.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ l'application linéaire canoniquement associée à A . Notons $\mathcal{C}_1$ (resp. $\mathcal{C}_2$) la base canonique de $\mathbb{K}^p$ (resp. $\mathbb{K}^n$).

D'après le théorème du rang, $\dim \ker f = p - r$, donc soit $(e_{r+1}, \dots, e_p)$ une base de $\ker f$.

Comme $(e_{r+1}, \dots, e_p)$ est libre, d'après le théorème de la base incomplète, il existe $e_1, \dots, e_r \in \mathbb{K}^p$ tels que $\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_p)$ soit une base de $\mathbb{K}^p$.

Comme $\mathcal{B}_1$ est génératrice de $\mathbb{K}^p$, alors $(f(e_1), \dots, f(e_p))$ est génératrice de $\text{Im } f$. Or : $\forall k > r, f(e_k) = 0$ donc $(f(e_1), \dots, f(e_r))$ est génératrice de $\text{Im } f$.

Or : $\text{Card}(f(e_1), \dots, f(e_r)) = r = \text{rg}(f) = \dim(\text{Im } f)$, donc $(f(e_1), \dots, f(e_r))$ est une base de $\text{Im } f$.

Comme $(f(e_1), \dots, f(e_r))$ est libre, d'après le théorème de la base incomplète, il existe $g_{r+1}, \dots, g_n \in \mathbb{K}^n$ tels que $\mathcal{B}_2 = (f(e_1), \dots, f(e_r), g_{r+1}, \dots, g_n)$ soit une base de $\mathbb{K}^n$.

On a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & & & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} = J_r.$$

Posons $P = \text{Pass}(\mathcal{B}_1, \mathcal{C}_1)$ et $Q = \text{Pass}(\mathcal{C}_2, \mathcal{B}_2)$, alors : $P \in GL_p(\mathbb{K})$, $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ et d'après les formules de changement de base :

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2}(f) = \text{Pass}(\mathcal{C}_2, \mathcal{B}_2) \text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f) \text{Pass}(\mathcal{B}_1, \mathcal{C}_1) = QJ_rP.$$



Exercice 33 (Chapitre 20, exemple 13)

Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à A . Posons $r = \text{rg}(f) = \text{rg}(A)$.

On a : $A^2 = 0_n$ donc : $\forall x \in \mathbb{R}^n, f(f(x)) = 0$ donc $\text{Im } f \subset \ker f$.

Soit $(e_1, e_3, \dots, e_{2r-1})$ une base de $\text{Im } f$.

Soit $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$, comme $e_{2k-1} \in \text{Im } f$, il existe $e_{2k} \in \mathbb{R}^n$ tel que : $e_{2k-1} = f(e_{2k})$.

$(e_1, e_3, \dots, e_{2r-1})$ une base de $\text{Im } f \subset \ker f$ ainsi $(e_1, e_3, \dots, e_{2r-1})$ est une famille libre de r vecteurs de $\ker f$. Comme $\dim \ker f = n - r$, d'après le théorème de la base incomplète, il existe $e_{2r+1}, \dots, e_n \in \mathbb{R}^n$ ($n - 2r$ vecteurs) tels que $(e_1, e_3, \dots, e_{2r-1}, e_{2r+1}, \dots, e_n)$ soit une base de $\ker f$.

Posons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Montrons que $\mathcal{B}$ est libre.

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que : $\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k = 0$.

On a : $\sum_{k=1}^n \lambda_k f(e_k) = 0$ or $(e_1, e_3, \dots, e_{2r-1}, e_{2r+1}, \dots, e_n)$ est une base de $\ker f$ donc :

$$\lambda_2 f(e_2) + \dots + \lambda_{2r} f(e_{2r}) = 0.$$

Donc :

$$\lambda_2 e_1 + \dots + \lambda_{2r} e_{2r-1} = 0.$$

Or $(e_1, e_3, \dots, e_{2r-1})$ est libre donc :

$$\lambda_2 = \dots = \lambda_{2r} = 0.$$

Ainsi :

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_{2r-1} e_{2r-1} + \lambda_{2r} e_{2r} + \dots + \lambda_n e_n = 0.$$

Or $(e_1, e_3, \dots, e_{2r-1}, e_{2r+1}, \dots, e_n)$ est libre donc :

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_{2r-1} = \lambda_{2r} e_{2r} = \dots = e_n = 0.$$

Ainsi $\mathcal{B}$ est libre.

Comme $\text{Card } \mathcal{B} = n$, alors $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

Et comme, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & 0 & \\ & & & & & 0 \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$, alors A est semblable à cette matrice.



Problèmes : Déterminants et séries



Exercice de calcul (Chapitre 9, exemple 15)

On pose : $-3y'' - 2y' + y = \cos(x)$ (E).

- On résout $-3y'' - 2y' + y = 0$ (E_0).

L'équation caractéristique associée à (E_0) est $-3r^2 - 2r + 1 = 0$, ses racines sont -1 et $\frac{1}{3}$. Donc les solutions de (E_0) sont :

$$x \mapsto \lambda e^{-x} + \mu e^{x/3}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

- Comme i n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution de (E) de la forme $y : x \mapsto A \cos x + B \sin x$. Alors :

$$-3y'' - 2y' + y = \cos(x) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (-4A - 2B) \cos x + (2A - 4B) \sin x = \cos x \Leftrightarrow \begin{cases} -4A - 2B = 1 \\ 2A - 4B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -\frac{1}{10} \\ A = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

car $(\cos, \sin)$ libre

- Donc les solutions de (E) sont :

$$x \mapsto \lambda e^{-x} + \mu e^{x/3} - \frac{1}{5} \cos x - \frac{1}{10} \sin x, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$



Inégalité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$|f_n(x)| \leq \frac{n \left| \frac{x}{n} \right|}{x(1+x^2)} \leq \frac{1}{1+x^2}.$$

Posons $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, alors f convient.



Problème 9 (E3A PC 2012)

Question préliminaire

$(1+\alpha)(1+\beta) = 1 + \alpha + \beta + \alpha\beta \geq 1 + \alpha + \beta$ puisque $\alpha\beta \geq 0$.

$$1. \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -v_1 \\ u_1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + u_1 v_1$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -v_1 & 0 \\ u_1 & 1 & -v_2 \\ 0 & u_2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + u_2 v_2 - u_1 \begin{vmatrix} 1 & -v_1 \\ u_1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + u_2 v_2 - u_1 (-v_1) = 1 + u_2 v_2 + u_1 v_1 \text{ par développement par rapport à la première colonne}$$

2. Développons Δ_n par rapport à sa dernière ligne :

$$\Delta_n = (-1)^{n+1+n} u_n \begin{vmatrix} & & 0 \\ & \Delta_{n-2} & \vdots \\ & & 0 \\ 0 & \cdots & -v_n \end{vmatrix} + \Delta_{n-1}$$

Puis par développement par rapport à la dernière ligne,

$$\Delta_n = u_n v_n \Delta_{n-2} + \Delta_{n-1}$$

3. Il est clair que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Delta_n \geq 0$.

La relation est vraie pour $n = 1$ et $n = 2$ puisque Δ_1 et Δ_2 sont des sommes de termes positifs.

Soit $n \geq 2$. Supposons la relation vraie au rang n et $n - 1$.

Alors, puisque $a_{n+1} \geq 0$, $\Delta_{n+1} = \Delta_n + a_{n+1} \Delta_{n-1} \geq 0$, montrant ainsi la relation vérifiée au rang $n + 1$.

Conclusion : $\forall n \geq 1, \Delta_n \geq 0$ et alors, $\forall n \geq 3, \Delta_n - \Delta_{n-1} = a_n \Delta_{n-2} \geq 0$.

On a également $\Delta_2 - \Delta_1 = u_2 v_2 \geq 0$ et on en conclut que $(\Delta_n)_n$ est croissante.

4. On a l'égalité pour $n = 1$ et $\Delta_2 = 1 + u_2 v_2 + u_1 v_1 \leq (1 + a_1)(1 + a_2)$ par la question préliminaire.

Supposons la relation vérifiée aux rangs n et $n - 1$.

Alors

$$\Delta_{n+1} \leq \prod_{k=1}^n (1 + a_k) + a_{n+1} \prod_{k=1}^{n-1} (1 + a_k) = \prod_{k=1}^{n-1} (1 + a_k) (1 + a_n + a_{n+1}) \leq \prod_{k=1}^{n-1} (1 + a_k) (1 + a_n) (1 + a_{n+1}) = \prod_{k=1}^{n+1} (1 + a_k)$$

On a utilisé la question préliminaire.

Ceci termine la récurrence.

5. 5.1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est clairement strictement positif. On peut donc considérer la suite $(\ln P_n)_n$.

Or, $\forall n \in \mathbb{N}, \ln P_n = S_n$.

La suite $(S_n)_n$ est la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n \geq 1} \ln(1 + a_n)$.

Or cette série est une série convergente car :

- * elle est à termes positifs.
- * $\ln(1 + a_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} a_n$.
- * $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge
- * On conclut par critère d'équivalence.

Ainsi, $(S_n)_n$ converge donc $(\ln P_n)_n$ converge. Par continuité de $\exp$ et caractérisation séquentielle de la continuité, $(P_n)_n$ converge. On peut même préciser vers une limite strictement positive.

5.2 Etant convergente, la suite $(P_n)_n$ est majorée. L'inégalité du 4 nous montre ainsi que $(\Delta_n)_n$ est majorée. Etant croissante et majorée, elle converge alors.

6. (a) à vérifier par récurrence sur n .

(b) Considérons la suite des sommes partielles $(T_n)_n$ de la série $\sum_{n \geq 2} t_n$:

$$\forall n \geq 2, T_n = \sum_{k=2}^n t_k = \Delta_n - \Delta_1, \text{ par télescopie.}$$

Par hypothèse, $(\Delta_n)_n$ converge donc il en est de même pour $(T_n)_n$, ce qui signifie que la série $\sum_{n \geq 2} t_n$ converge.

6.3 $\forall n \geq 3, t_n = a_n \Delta_{n-2} \geq a_n \geq 0$ par 6.1.

Par critère de comparaison des séries à termes positifs, et puisque la série $\sum_{n \geq 2} t_n$ converge, on obtient la convergence

de la série $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge

7. On a établi l'équivalence entre la convergence de la suite $(\Delta_n)_n$ et la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} a_n$



Problème 10 (Problème (donné en cours) : Formule de Stirling)

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
 v_{n+1} - v_n &= \ln \frac{u_{n+1}}{u_n} \\
 &= \ln \left(\frac{(n+1)!}{n!} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \left(\frac{e}{n+1} \right)^{n+1} \left(\frac{n}{e} \right)^n \right) \\
 &= \ln \left((n+1) \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} e \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \frac{1}{n+1} \right) \\
 &= \ln \left(e \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1/2} \right) \\
 &= 1 + \left(n + \frac{1}{2} \right) \ln \left(\frac{n}{n+1} \right) \\
 &= 1 - \left(n + \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \\
 &= 1 - \left(n + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) \\
 &= 1 - \left(1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \\
 &= -\frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
 &\sim -\frac{1}{12n^2}
 \end{aligned}$$

- (b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $-\frac{1}{12n^2}$ donc $\sum (v_{n+1} - v_n)$ et $\sum -\frac{1}{12n^2}$ sont de même nature.
 Or $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, ainsi $\sum (v_{n+1} - v_n)$ converge.
 Or $\sum (v_{n+1} - v_n)$ est une série télescopique donc (v_n) converge.
 (c) Posons $l = \lim v_n$, alors $\lim u_n = e^l \neq 0$. Donc :

$$u_n = \frac{n!}{\sqrt{n}} \left(\frac{e}{n} \right)^n \sim e^l.$$

Posons $k = e^l > 0$, alors :

$$n! \sim k\sqrt{n} \left(\frac{n}{e} \right)^n.$$

2. (a) i. • $I_0 = \int_0^{\pi/2} 1 dt = \frac{\pi}{2}$
 • $I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin(t) dt = [-\cos(t)]_0^{\pi/2} = 1$
 ii. Soit $n \geq 2$. On effectue l'intégration par parties :

$$\begin{aligned}
 u(t) &= \sin^{n-1}(t) & u'(t) &= (n-1) \cos(t) \sin^{n-2}(t) \\
 v'(t) &= \sin(t) & v(t) &= -\cos(t)
 \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
 I_n &= [-\cos(t) \sin^{n-1}(t)]_0^{\pi/2} + (n-1) \int_0^{\pi/2} \cos^2(t) \sin^{n-2}(t) dt \\
 &= (n-1) \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2(t)) \sin^{n-2}(t) dt \\
 &= (n-1)(I_{n-2} - I_n).
 \end{aligned}$$

Donc $nI_n = (n-1)I_{n-2}$ et ainsi :

$$\forall n \geq 2, I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

- iii. Soit $p \in \mathbb{N}$.

- Soit $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on a :

$$\frac{I_{2k}}{I_{2(k-1)}} = \frac{2k-1}{2k},$$

donc :

$$\prod_{k=1}^p \frac{I_{2k}}{I_{2(k-1)}} = \prod_{k=1}^p \frac{2k-1}{2k}.$$

Ainsi, par produit télescopique :

$$\frac{I_{2p}}{I_0} = \prod_{k=1}^p \frac{2k-1}{2k} = \prod_{k=1}^p \frac{(2k-1)(2k)}{(2k)^2} = \frac{\prod_{k=1}^p (2k-1)(2k)}{\prod_{k=1}^p (2k)^2} = \frac{(2p)!}{(2^p \prod_{k=1}^p k)^2} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}.$$

Ainsi :

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \frac{\pi}{2}.$$

iv. De même :

$$\frac{I_{2p+1}}{I_1} = \prod_{k=1}^p \frac{2k}{2k+1} = \prod_{k=1}^p \frac{(2k^2)}{(2k)(2k+1)} = \frac{\prod_{k=1}^p (2k^2)}{\prod_{k=1}^p (2k)(2k+1)} = \frac{(2^p \prod_{k=1}^p k)^2}{(2p+1)!} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}.$$

Ainsi :

$$I_{2p+1} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}.$$

- (b) i. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a : $0 \leq \sin t \leq 1$. Donc : $\sin^{2p+1}(t) \leq \sin^{2p}(t) \leq \sin^{2p-1}(t)$.
Donc, par croissance de l'intégrale :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, I_{2p+1} \leq I_{2p} \leq I_{2p-1}.$$

ii. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$1 \leq \frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} \leq \frac{I_{2p-1}}{I_{2p+1}} = \frac{2p+1}{2p}.$$

Donc, par théorème d'encadrement :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} = 1.$$

iii. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \frac{\pi}{2} \frac{(2p+1)!}{(2^p p!)^2} = \left(\frac{(2p)!}{2^{2p} (p!)^2} \right)^2 (2p+1) \frac{\pi}{2}.$$

Or $\frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} \sim 1$ donc $\left(\frac{(2p)!}{2^{2p} (p!)^2} \right)^2 (2p+1) \frac{\pi}{2} \sim 1$. D'où, comme $2p+1 \sim 2p$, on a :

$$\frac{1}{p} \left(\frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p)!} \right)^2 \sim \pi.$$

3. D'après 1.e :

$$\frac{1}{p} \left(\frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p)!} \right)^2 \sim \frac{1}{p} \left(\frac{2^{2p} k^2 p \left(\frac{p}{e}\right)^{2p}}{k \sqrt{2p} \left(\frac{2p}{e}\right)^{2p}} \right)^2 = \frac{1}{p} \left(k \sqrt{\frac{p}{2}} \right)^2.$$

Donc :

$$\frac{1}{p} \left(\frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p)!} \right)^2 \sim \frac{k^2}{2}.$$

4. Ainsi $\frac{k^2}{2} = \pi$ donc $k = \sqrt{2\pi}$, d'où :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n.$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n u_k &= \sum_{k=1}^n \left(k \ln \frac{2k+1}{2k-1} - 1 \right) \\
 &= \sum_{k=1}^n k (\ln(2k+1) - \ln(2k)) - n \\
 &= \sum_{k=1}^n ((k+1) \ln(2k+1) - k \ln(2k)) - \sum_{k=1}^n \ln(2k+1) - n \\
 &= (n+1) \ln(2n+1) - \sum_{k=1}^n \ln(2k+1) - n \\
 &= \ln(2n+1)^{n+1} - \ln \prod_{k=1}^n (2k+1) - n \\
 &= \ln(2n+1)^{n+1} - \ln \frac{(2n+1)!}{2^n \cdot n!} - \ln(e^n) \\
 &= \ln \left(\frac{(2n+1)^{n+1} \cdot 2^n \cdot n!}{(2n+1)! e^n} \right) \\
 &= \ln \left(\frac{(2n+1)^n \cdot 2^n \cdot n!}{(2n)! e^n} \right)
 \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}
 \frac{(2n+1)^n \cdot 2^n \cdot n!}{(2n)! e^n} &\sim \frac{(2n+1)^n \cdot 2^n \cdot \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n}{\sqrt{4\pi n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} e^{2n}} \\
 &\sim \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(2n+1)^n}{\left(\frac{2n}{e}\right)^n e^n} \\
 &\sim \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2n+1}{2n} \right)^n \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{1}{2n} \right)^n \sim \frac{1}{\sqrt{2}} e^{n \ln(1 + \frac{1}{2n})}
 \end{aligned}$$

Or $n \ln(1 + \frac{1}{2n}) \sim \frac{1}{2}$ donc :

$$\lim \frac{(2n+1)^n \cdot 2^n \cdot n!}{(2n)! e^n} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{1/2}.$$

D'où :

$$\lim \sum_{k=1}^n u_k = \ln \frac{1}{\sqrt{2}} e^{1/2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln(2).$$

Ainsi $\sum u_n$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln(2).$$

Problème : Probabilités et matrices



Exercice de calcul (Chapitre 14, exemple 13)

f est le produit de fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ donc f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Posons : $g : x \mapsto x + 2$ et $h : x \mapsto e^{2x}$, on a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = 1 \text{ et } \forall k \geq 2, g^{(k)}(x) = 0$$

Par récurrence, on montre que : $\forall k \in \mathbb{N}$, on a $g^{(k)}(x) = 2^k e^{2x}$.

Soit $n \geq 1$, on utilise alors la formule de Leibniz.

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g^{(k)}(x) h^{(n-k)}(x) \\ &= \binom{n}{0} f^{(0)}(x) g^{(n)}(x) + \binom{n}{1} f'(x) g^{(n-1)}(x) + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \\ &= (x+2)2^n e^{2x} + nx2^{n-1} e^{2x} = 2^{n-1}((2+n)x+4)e^{2x} \end{aligned}$$

On remarque que la relation reste valable pour $n = 0$.



Inégalité

Soit $(x, t) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[$, on a :

$$|f(x, t)| \leq \frac{\pi}{2t(1+t^2)} \leq \frac{\pi}{2t^3}.$$

Posons $g : t \mapsto \frac{\pi}{2t^3}$ alors g convient.



Problème 11 (CCINP PC 2019)

1. A l'instant 0, le pion est en A donc $p_0 = 1$ et $q_0 = r_0 = 0$.

A l'instant 1, la probabilité qu'il reste en A est $\frac{1}{2}$ donc $p_1 = \frac{1}{2}$. Sinon, il se déplace de manière équiprobable sur l'un des deux autres points donc $q_1 = r_1 = \frac{1}{4}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Pour $n = 0$, on a bien $V_1 = MV_0$.

On suppose maintenant $n \in \mathbb{N}^*$.

$\{A_n, B_n, C_n\}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles donc, d'après la formule des probabilités totales,

$$P(A_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1})$$

$P_{A_n}(A_{n+1})$ est la probabilité de rester en A de l'instant n à l'instant $n+1$ donc $\frac{1}{2}$.
 $P_{B_n}(A_{n+1})$ est la probabilité de passer de B à A donc $\frac{1}{4}$. De même, $P_{C_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{4}$.
 Par conséquent, $P(A_{n+1}) = \frac{1}{2}P(A_n) + \frac{1}{4}P(B_n) + \frac{1}{4}P(C_n)$.
 On raisonne de même pour exprimer b_{n+1} et c_{n+1} et on conclut que $V_{n+1} = MV_n$.

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n) : "V_n = M^n V_0"$.

$M^0 = I_3$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.

D'après la question précédente, $V_{n+1} = MV_n$ et, d'après l'hypothèse de récurrence, $V_n = M^n V_0$ donc $V_{n+1} = MM^n V_0 = M^{n+1} V_0 : \mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par récurrence, on peut alors conclure que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = M^n V_0$.

$V_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc, en utilisant le résultat admis sur M^n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, p_n = \frac{4^n + 2}{3 \cdot 4^n}, q_n = r_n = \frac{4^n - 1}{3 \cdot 4^n}$$

4. Quand n tend vers l'infini, $4^n + 2 \sim 4^n$ et $4^n - 1 \sim 4^n$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = \frac{1}{3}$.

Cela signifie que, si on observe la position du pion après un grand nombre d'étapes, il y a autant de chances qu'il soit en A , en B ou en C .

5. $X_1 + \dots + X_n$ est le nombre de passages par le point A lors des n premières étapes et $E(X_1 + \dots + X_n)$ est le nombre moyen de passages par A lors des n premières étapes.

6. X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $p = P(A_n) = \frac{4^n + 2}{3 \cdot 4^n}$ donc $E(X_n) = \frac{4^n + 2}{3 \cdot 4^n}$.

7. $a_n = E(X_1 + \dots + X_n)$ donc, par linéarité de l'espérance, $a_n = \sum_{i=1}^n E(X_i)$ et, d'après la question précédente,

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{4} \right)^i \right) \\ &= \frac{n}{3} + \frac{2}{3} \frac{1 - \frac{1}{4^n}}{1 - \frac{1}{4}} \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$a_n = \frac{n}{3} + \frac{2}{9} \left(1 - \frac{1}{4^n} \right)$$

8. Comme le pion est en A à l'instant 0, $(T_B = 1) = B_1$ d'où $P(T_B = 1) = \frac{1}{4}$.

$$\begin{aligned} (T_B = 2) &= \overline{B_1} \cap B_2 \\ &= (A_1 \cap B_2) \cup (C_1 \cap B_2) \end{aligned}$$

Ces deux événements sont incompatibles donc $P(T_B = 1) = P(A_1 \cap B_2) + P(C_1 \cap B_2)$.

Par définition d'une probabilité conditionnelle, $P(A_1 \cap B_2) = P(A_1)P_{A_1}(B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$.

De même $P(C_1 \cap B_2) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$.

Finalement, $P(T_B = 2) = \frac{3}{16}$.

9. A l'instant n , le pion est en A , en B ou en C donc $\overline{B_n} = A_n \cup C_n$.

10. $\overline{B_1} \cap \overline{B_2} = (A_1 \cup C_1) \cap (A_2 \cup C_2) = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap C_2) \cup (C_1 \cap A_2) \cup (C_1 \cap C_2).$

En prenant l'intersection avec B_3 on obtient 4 événements deux à deux incompatibles donc

$$P(B_3 \cap \overline{B_1} \cap \overline{B_2}) = P(B_3 \cap A_1 \cap A_2) + P(B_3 \cap A_1 \cap C_2) + P(B_3 \cap C_1 \cap A_2) + P(B_3 \cap C_1 \cap C_2).$$

$P(B_3 \cap A_1 \cap A_2) = P(A_1 \cap A_2)P_{A_1 \cap A_2}(B_3) = P(A_1 \cap A_2)P_{A_2}(B_3)$ car la position à l'instant 3 ne dépend que la position à l'instant

2. Ainsi $P(B_3 \cap A_1 \cap A_2) = \frac{1}{4}P(A_1 \cap A_2).$

On procède de même avec les 3 autres termes puis on se retrouve avec la somme de 4 probabilités d'événements incompatibles. On utilise la relation du début de cette question pour conclure :

$$P(B_3 \cap \overline{B_1} \cap \overline{B_2}) = \frac{1}{4}P(\overline{B_1} \cap \overline{B_2})$$

Avec la définition d'une probabilité conditionnelle, $P(B_3|\overline{B_1} \cap \overline{B_2}) = \frac{1}{4}$

11. Soit $k \in \mathbb{N}^*.$

$$(T_B = k) = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{B_i} \right) \cap B_k. \text{ Avec la définition d'une probabilité conditionnelle et le résultat admis, } P(T_B = k) = \frac{1}{4}P\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{B_i}\right).$$

$$\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{B_i} = (T_B \geq k) = (T_B = k) \cup (T_B \geq k+1) \text{ donc } P(T_B = k) = \frac{1}{4}(P(T_B = k) + P(T_B \geq k+1)) = \frac{1}{4}(P(T_B = k) + 4P(T_B = k+1)) \text{ d'où}$$

$$P(T_B = k+1) = \frac{3}{4}P(T_B = k). \text{ De plus } P(T_B = 1) = \frac{1}{4} \text{ donc, pour } k \geq 1, P(T_B = k) = \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}.$$

$$\{T_B = k; k \in \mathbb{N}\} \text{ est un système complet d'événements donc } P(T_B = 0) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} P(T_B = k) = 1 - \frac{1}{4} \frac{1}{1 - \frac{3}{4}}.$$

Par conséquent, $P(T_B = 0) = 0.$

12. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*, P(T_B = k) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{k-1}$ donc T_B suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{4}$. On en déduit que T_B admet une espérance et $E(T_B) = 4.$

Problème complet d'algèbre



Problème 12 (Centrale PC 2016)



I L'opérateur de translation et l'opérateur de différence

I.A - L'opérateur de translation

1. Soit $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$, un polynôme non nul de $\mathbb{R}_n[X]$, de degré $d = \deg(P)$ (i.e. $a_d \neq 0$).
Alors, $\tau(P)$ est de la forme :

$$P(X+1) = \sum_{k=0}^d a_k (X+1)^k = a_d X^d + (d a_d + a_{d-1}) X^{d-1} + \sum_{k=0}^{d-2} b_k X^k$$

Comme $a_d \neq 0$:

$$\deg(\tau(P)) = \deg(P) \text{ et } \text{cd}(\tau(P)) = \text{cd}(P)$$

2. Notons que $\tau^0(P) = P$.
Et que si $\tau^k(P)(X) = P(X+k)$, alors $\tau^{k+1}(P)(X) = \tau(\tau^k(P))(X) = P((X+k)+1) = P(X+(k+1))$.
Ainsi, par récurrence

$$\forall k \in \mathbb{N}, \tau(P)(X) = P(X+k)$$

3. D'après la formule du binôme de Newton (changement de variable $i = h+1$),

$$\forall j \in \mathbb{N}_{n+1}, \tau(P_j)(X) = (X+1)^{j-1} = \sum_{h=0}^{j-1} \binom{j-1}{h} X^h = \sum_{i=1}^j \binom{j-1}{i-1} P_i$$

M est donc triangulaire supérieure et les coefficients de M vérifient donc

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, (M)_{i,j} = \begin{cases} \binom{j-1}{i-1} & \text{pour } i \leq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

4. Question non abordable en sup!

La matrice M est triangulaire supérieure, donc ses valeurs propres se trouvent sur la diagonale. Il s'agit des nombres $\binom{j-1}{j-1} = 1$.

Comme M et τ ont les mêmes valeurs propres,

$$\text{Sp}(\tau) = \{1\}$$

Si M était diagonalisable, elle serait alors semblable à la matrice unité, et donc elle serait égale à la matrice unité.

Ainsi,

$$M \text{ et } \tau \text{ ne sont pas diagonalisables}$$

5. 0 n'étant pas valeur propre de τ ,

τ est bijective

Puis si on considère $\bar{\tau} : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X], P(X) \mapsto P(X-1)$,
on montre qu'il s'agit d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Il vérifie : $\tau \circ \bar{\tau} = \bar{\tau} \circ \tau = \text{id}$:

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \tau(\bar{\tau}(P))(X) = \bar{\tau}(P)(X+1) = P(X) = \tau(\bar{\tau}(P))(X)$$

Donc

$$\tau^{-1}(P)(X) = P(X-1)$$

Puis, comme pour la question 2), on montre que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\tau^{-k}(P)(X) = P(X-k)$.
Donc la formule est toujours vraie :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \tau(P)(X) = P(X+k)$$

6. Avec l'expression de τ^{-1} , on applique la même méthode qu'en 3) et on obtient :

$$\forall j \in \mathbb{N}_{n+1}, \tau^{-1}(P_j)(X) = (X-1)^{j-1} = \sum_{h=0}^{j-1} \binom{j-1}{h} (-1)^{j-1-h} X^h = \sum_{i=1}^j (-1)^{j-i} \binom{j-1}{i-1} P_i$$

Puis

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, (M^{-1})_{i,j} = \begin{cases} (-1)^{j-i} \binom{j-1}{i-1} & \text{pour } i \leq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

7. La $k+1^{\text{e}}$ ligne du calcul $V = Q \times U$ est justement

$$v_k = \sum_{j=1}^{n+1} Q_{k+1,j} u_{j-1} = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} u_j$$

On peut identifier (après changement d'indice) : $Q_{k,j} = \begin{cases} \binom{k-1}{j-1} & \text{pour } j \leq k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

On a donc

$$Q = M^T$$

8. M est inversible, donc $Q = M^T$ également et $Q^{-1} = (M^T)^{-1} = (M^{-1})^T$.

Puis par équivalence : $V = Q \times U \iff U = Q^{-1} \times V = (M^{-1})^T \times V$.

La $k+1^{\text{e}}$ ligne de ce calcul donne alors

$$u_k = \sum_{j=1}^{n+1} ((M^{-1})^T)_{k+1,j} v_{j-1} = \sum_{j=1}^{n+1} ((M^{-1}))_{j,k+1} v_{j-1} = \sum_{j=0}^n ((M^{-1}))_{j+1,k+1} v_j$$

$$u_k = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} v_j$$

9. On a alors

$$v_k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \lambda^j = (\lambda+1)^k$$

On vérifie bien :

$$\sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} v_j = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (\lambda+1)^j (-1)^{k-j} = ((\lambda+1) - 1)^k = u_k$$

I.B - L'opérateur de différence

1. Avec les mêmes notations qu'en 1.A.1), avec P non constant on a :

$$\delta(P)(X) = a_d X^d + (d a_d + a_{d-1}) X^{d-1} + \sum_{k=0}^{d-2} b_k X^k - a_d X^d - a_{d-1} X^{d-1} - \sum_{k=0}^{d-2} a_k X^k = d a_d X^{d-1} + \sum_{k=0}^{d-2} c_k X^k$$

Comme $a_d \neq 0$:

$$\boxed{\text{si } P, \text{ non constant, } \deg(\delta(P)) = \deg(P) - 1 \text{ et } \text{cd}(\delta(P)) = \deg(P) \times \text{cd}(P)}$$

2. D'après la question précédente, si P n'est pas constant, $\deg(P) \geq 1$ et $\deg(\delta(P)) \geq 0$, donc $\delta(P)$ n'est pas nul. Ainsi, si $\delta(P) = 0$, alors P est constant.

Réciproquement, si P est constant, le calcul (simple) donne $\delta(P) = 0$.

Donc

$$\boxed{\ker(\delta) = \mathbb{R}_0[X]}$$

La question précédente montre aussi que $\text{Im}(\delta) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Or d'après le théorème du rang : $\dim(\text{Im}(\delta)) = n + 1 - \dim(\ker(\delta)) = n = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X])$.

Donc :

$$\boxed{\text{Im}(\delta) = \mathbb{R}_{n-1}[X]}$$

3. Si $\ker(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[X]$, avec $j < n$.

$$P \in \ker(\delta^{j+1}) \iff \delta^{j+1}(P) = 0 = \delta^j(\delta(P)) \iff \delta(P) \in \mathbb{R}_{j-1}[X]$$

Donc

$$P \in \ker(\delta^{j+1}) \iff \deg(P) = \deg(\delta(P)) + 1 \leq (j-1) + 1 = j \iff P \in \mathbb{R}_j[X]$$

Ainsi, par récurrence :

$$\boxed{\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \ker(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[X]}$$

Si $P \in \text{Im}(\delta^j)$, alors il existe $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P = \delta^j(Q)$.

Or une récurrence simple (suite arithmétique) montre que $\deg P = \deg(Q) - j$, donc $\deg(P) \leq n - j$.

Par conséquent, $P \in \mathbb{R}_{n-j}[X]$, et donc $\text{Im}(\delta^j) \subset \mathbb{R}_{n-j}[X]$.

Le théorème du rang assure par ailleurs que ces deux espaces ont même dimension, donc :

$$\boxed{\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \text{Im}(\delta^j) = \mathbb{R}_{n-j}[X]}$$

4. Notons Δ , la matrice de δ dans la base (P_k) .

Par construction de $\delta = \tau - \text{id}$, on a $\Delta = M - I_{n+1}$.

Puis comme M commute avec I_{n+1} , alors d'après la formule de Newton : $\Delta^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} M^j$.

Ce qui permet d'affirmer, en revenant aux endomorphismes :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \delta^k = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \tau^j}$$

5. Si $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] = \ker(\delta^n)$, alors $\delta^n(P) = 0$. Donc :

$$0(X) = [\delta^n(P)](X) = \left[\sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} \tau^j(P) \right](X) = \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} [\tau^j(P)(X)] = \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(X+j)$$

il s'agit bien du polynôme nul.

Et en particulier en la valeur réelle $X = 0$:

$$\boxed{\sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(j) = 0}$$

6. a) $u \circ \delta^2 = u \circ [u^2 \circ u^2] = u^5 = [u^2 \circ u^2] \circ u = \delta^2 \circ u$.

Donc

$$\boxed{u \text{ et } \delta^2 \text{ commutent}}$$

b) Soit $P \in \mathbb{R}_1[X] = \ker \delta^2$, alors

$$\delta^2(u(P)) = u(\delta^2(P)) = u(0) = 0$$

Donc $u(P) \in \ker(\delta^2) = \mathbb{R}_1[X]$.

Par conséquent

$$\boxed{\mathbb{R}_1[X] \text{ est stable par } u}$$

c) Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ vérifie $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} = A \times A^2 = A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $a = d$ et $c = 0$, ainsi $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, puis $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$, et ainsi nécessairement $a = 0$, puis $2ab = 0$; ce qui est contradictoire avec $ab = 1$.

Donc

$$\boxed{\text{aucune matrice } A \text{ ne vérifie } A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

d) Puisque $\mathbb{R}_1[X]$ est stable par u , notons $\tilde{u} : \mathbb{R}_1[X] \rightarrow \mathbb{R}_1[X], P \mapsto u(P)$.

Considérons alors A , la matrice de $\tilde{u}$ dans la base (P_1, P_2) de $\mathbb{R}_1[X]$.

Alors A^2 est égale à la matrice de δ sur $\mathbb{R}_1[X]$ donc $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Or d'après la question précédente, ceci est impossible. Donc

$$\boxed{\text{Il n'existe pas d'endomorphisme } u \text{ de } \mathbb{R}_n[X] \text{ tel que } u^2 = \delta}$$

7. a) On a vu (questions I.B.3)) que $\deg(\delta^i(P)) = \deg(P) - i = d - i$.

Ainsi, la famille $(P, \delta(P), \dots, \delta^d(P))$ est une famille de degré échelonné (de d à 0).

$$\boxed{C'est \text{ une famille libre et } \text{vect}(P, \delta(P), \dots, \delta^d(P)) = \mathbb{R}_d[X]}$$

b) Soit V stable par δ .

Si $P \in V$, alors $\delta^i(P) \in V$ et donc $\mathbb{R}_{\deg(P)}[X] = \text{vect}(P, \delta(P), \dots, \delta^n(P)) \subset V$.

Il reste à montrer l'égalité, il faut prendre le polynôme en degré maximum...

V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$. Notons $d = \dim(V) - 1$.

Notons $(e_0, \dots, e_d)$ une base de V . Nécessairement, l'un des e_i est un polynôme de degré supérieur ou égal à d .

Sinon, on aurait une famille libre de $d + 1$ vecteurs de $\mathbb{R}_d[X]$, ce qui est impossible.

Donc il existe P dans V de degré $r \geq d$.

Si $\deg P = r > d$, alors d'après la remarque précédente, $\mathbb{R}_r[X] = \text{vect}(P, \delta(P), \dots, \delta^r(P)) \subset V$ et V ne peut être de dimension $d + 1$. Donc il existe P de degré d dans V et $\mathbb{R}_d[X] \subset V$ et par égalité des dimensions :

$$\boxed{\text{il existe } d \in \llbracket 0, n \rrbracket \text{ tel que } V = \mathbb{R}_d[X]}$$

II Applications en combinatoire

II.A - Quelques cas particuliers

1. Si φ est une surjection de E sur F , alors nécessairement $\#F \leq \#E$. Donc

$$\boxed{\text{si } n > p, \text{ alors } S(p, n) = 0}$$

2. Une surjection d'un ensemble de cardinal n sur un ensemble de cardinal n est en fait une bijection. Donc

$$\boxed{S(n, n) = n!}$$

3. Les surjections de $\mathbb{N}_{n+1}$ sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ sont parfaitement déterminées -et de manière unique- par :

- Le choix de deux éléments de $\mathbb{N}_{n+1}$ qui auront la même image : $\binom{n+1}{2}$ possibilités

- Puis, la distribution des n éléments de l'ensemble d'arrivée, avec les n éléments de l'ensemble de départ (un de ces éléments étant double) : $n!$ possibilités

Le principe de décomposition permet alors d'affirmer que le cardinal recherché est le produit :

$$S(n+1, n) = \binom{n+1}{2} n! = \frac{n \times (n+1)!}{2}$$

II.B - Recherche d'une expression générale

1. *Le résultat ne fait pas partie du programme. Il faut le démontrer.*

Une application de $E = \mathbb{N}_p$ sur un ensemble $F = \llbracket 1, n \rrbracket$ est parfaitement définie -et de manière unique- par la donnée pour chacun des p éléments de E d'un unique élément de F . Donc pour chacun des p éléments de E , il y a n possibilités.

Le principe de décomposition permet alors d'affirmer que le cardinal recherché est le produit :

$$\text{le nombre d'applications de } \mathbb{N}_p \text{ sur } \llbracket 1, n \rrbracket \text{ est donc } n \times n \cdots \times n = n^p$$

2. Notons $I_k = \{\varphi : \mathbb{N}_p \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket \mid \#\varphi(\mathbb{N}_p) = k\}$. Alors, d'après la question précédente :

$$n^p = \sum_{k=1}^n \#I_k$$

Il reste à dénombrer I_k . Or les applications φ de I_k sont parfaitement déterminées -et de manière unique- par :

- Le choix de k éléments de $\mathbb{N}_n$ qui forment $\varphi(\mathbb{N}_p) : \binom{n}{k}$ possibilités
- Puis, le choix des surjections de $\mathbb{N}_p$ sur l'ensemble $\varphi(\mathbb{N}_p)$ à k éléments : $S(p, k)$ possibilités

Le principe de décomposition permet alors d'affirmer que le cardinal recherché est le produit :

$$n^p = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} S(p, k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} S(p, k)$$

avec la convention $S(p, 0) = 0$.

3. On applique alors la formule d'inversion trouvée en I.A.8), (p constant)

$$v_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u_k \iff u_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} v_k$$

avec $v_n = n^p$, $u_k = S(p, k)$, donc

$$\forall p \geq n, S(p, n) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p$$

4. Pour $p < n$, le polynôme $P = X^p$ appartient à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, donc d'après I.B.5),

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} P(k) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p = 0 = S(p, n)$$

On peut donc généraliser, de manière cohérente, la formule obtenue à la question précédente :

$$\forall p \in \mathbb{N}, S(p, n) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p$$

II.C

1. Avec les questions précédentes :

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^n = S(n, n) = n! \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^{n+1} = S(n+1, n) = \frac{n \times (n+1)!}{2}$$

III Etude d'une famille de polynômes

III.A - Généralités

1. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\deg(H_k) = k$.
Donc la famille $(H_0, H_1, \dots, H_n)$ est une famille de degrés échelonnés, donc elle est libre.
Elle est constituée de $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$ éléments de $\mathbb{R}_n[X]$. Donc

$$(H_0, H_1, \dots, H_n) \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X]$$

2. $\delta(H_0) = 1 - 1 = 0$.
Et pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\begin{aligned} \delta(H_k)(X) &= H_k(X+1) - H_k(X) = \frac{1}{k!} \left(\prod_{j=0}^{k-1} (X+1-j) - \prod_{j=0}^{k-1} (X-j) \right) = \frac{1}{k!} \left((X+1) \prod_{j=0}^{k-2} (X-j) - (X-k+1) \prod_{j=0}^{k-2} (X-j) \right) \\ \delta(H_k) &= \frac{1}{k!} \left(\prod_{j=0}^{k-2} (X-j) \right) ((X+1) - (X-k+1)) = \frac{1}{k!} \left(\prod_{j=0}^{k-2} (X-j) \right) \times k = H_{k-1} \end{aligned}$$

Bilan :

$$\delta(H_0) = 0 \text{ et pour tout } k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \delta(H_k) = H_{k-1}$$

3. Comme $\delta = \tau - \text{id}$, on a alors $\tau(H_0) = \delta(H_0) + H_0 = H_0$ et $\tau(H_k) = \delta(H_k) + H_k = H_k + H_{k-1}$.
Ainsi M' est exactement la matrice de τ dans la base $(H_0, H_1, \dots, H_n)$ de $\mathbb{R}_n$.
Par conséquent,

$$M \text{ et } M' \text{ sont semblables (matrice d'un même endomorphisme dans deux bases différentes)}$$

4. Pour tout $k, \ell \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a (*par récurrence pour $\ell \geq k$*) :

$$\delta^k(H_\ell) = \delta^{k-1}(H_{\ell-1}) = \begin{cases} H_{\ell-k} & \text{si } \ell \geq k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Puis comme $h \neq 0$, $H_h(0) = 0$ et $H_0(0) = 1$.

Par conséquent :

$$\delta^k(H_\ell)(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ell = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

5. Puisque (H_k) est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$,
il existe $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que $P = \sum_{\ell=0}^n a_\ell H_\ell$.
Puis, par linéarité :

$$\delta^k P(0) = \sum_{\ell} a_\ell \delta^k(H_\ell)(0) = a_k$$

Donc

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], P = \sum_{k=0}^n \delta^k(P)(0) H_k$$

III.B - Étude d'un exemple

1. Notons $T(X) = X^3 + 2X^2 + 5X + 7$.
Il s'agit de calculer $\delta^k(T)(0)$, pour k de 0 à 3. Or

$$T(X) = X^3 + 2X^2 + 5X + 7, \delta(T)(X) = 3X^2 + 7X + 8, \delta^2(T)(X) = 6X + 10, \delta^3(T)(X) = 6$$

On a donc

$$T = 6H_3 + 10H_2 + 8H_1 + 7H_0$$

2. Puisque $\delta^2(H_k) = H_{k-2}$, alors par linéarité :

$$\text{si } P = 6H_3 + 10H_2 + 8H_1 + 7H_0, \text{ on a } \delta^2(P) = 6H_3 + 10H_2 + 8H_1 + 7H_0$$

3. Considérons (p_n) une solution particulière.

Toute autre solution (u_n) vérifie :

$$\begin{aligned}\forall k \in \mathbb{N}, (u-p)_{k+2} - 2(u-p)_{k+1} + (u-p)_k &= (u_{k+2} - 2u_{k+1} + u_k) - (p_{k+2} - 2p_{k+1} + p_k) \\ &= (k^3 + 2k^2 + 5k + 7) - (k^3 + 2k^2 + 5k + 7) = 0\end{aligned}$$

Donc la suite $(u-p)_n$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

Son équation caractéristique est $r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2$,

et il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = p_n + (A + Bn)1^n$

Reste à trouver une solution particulière. On a vu que $\delta^2(P)(X) = P(X+2) - 2P(X+1) + P(X)$.

Avec P tel que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\delta^2(P)(k) = k^3 + 2k^2 + 5k + 7$ et $p_k = P(k)$, on a une solution particulière.

Enfin, comme pour $k \geq h$, $H_h(k) = \frac{1}{h!} k(k-1) \dots (k-(h-1)) = \frac{1}{h!} \times \frac{k!}{(k-h)!} = \binom{k}{h}$, et pour $k < h$, $H_h(k) = 0$; on a

il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k = A + Bk + 6\binom{k}{5} + 10\binom{k}{4} + 8\binom{k}{3} + 7\binom{k}{2}$

avec convention : $\binom{k}{h} = 0$ si $h > k$

III.C - Polynômes à valeurs entières

1. Le calcul a été fait plus haut pour les nombres entiers naturels.

Si $k < 0$, en notant $p = -k$, on a :

$$H_n(k) = \frac{1}{n!} k(k-1) \dots (k-(n-1)) = \frac{1}{n!} (-p)(-p-1) \dots (-p-(n-1)) = \frac{1}{n!} (-1)^n \frac{(p+n-1)!}{(p-1)!} = (-1)^n \binom{p+n-1}{n}$$

Finalement

$$H_n(k) = \begin{cases} \binom{k}{n} & \text{si } k \geq n \\ 0 & \text{si } k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \\ (-1)^n \binom{n-1-k}{n} & \text{si } k < 0 \end{cases}$$

2. Tous les coefficients binomiaux sont entiers (puisque'il s'agit d'un cardinal d'un ensemble), donc pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $H_n(k) \in \mathbb{Z}$.

$H_n(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$

3. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$\delta(P)(k) = P(k+1) - P(k)$$

Par soustraction de nombres entiers, il s'agit d'un nombre entier. Donc

Si P est à valeurs entières sur les entiers, alors il en est de même pour $\delta(P)$

4. Si P est à valeurs entières sur les entiers,

alors par récurrence (sur $h \in \mathbb{N}$), pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$, $\delta^h(P)(k) \in \mathbb{Z}$;

et donc en particulier $\delta^h(P)(0) \in \mathbb{Z}$, et les coordonnées de P dans la base (H_k) sont des entières.

Réciproquement, si les coordonnées de P dans la base (H_k) sont des entiers,

alors $P = \sum_{i=0}^d a_i H_i$, puis $P(k) = \sum_{i=0}^d a_i H_i(k) \in \mathbb{Z}$ (combinaison linéaire d'entiers).

Bilan :

P est à valeurs entières sur les entiers si et seulement si ses coordonnées dans (H_k) sont entières

5. Supposons que P , de degré d , est à valeurs entières sur les entiers,

Alors d'après les questions précédentes, il existe $a_0, a_1 \dots a_d \in \mathbb{Z}$ tels que $P = \sum_{i=0}^d a_i H_i$.

Et donc

$$d!P = \sum_{i=0}^d a_i \times d!H_i = \sum_{i=0}^d \left(a_i \times d(d-1) \dots (i+1) \times \prod_{j=0}^{i-1} (X-j) \right)$$

Il s'agit bien d'un polynôme $d!P$ à coefficients entiers.

Comme le montre le polynôme $P = \frac{1}{2}X^2$, de degré 2 :

on a $2!P$ à coefficients entiers, mais $P(1) = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.

La réciproque est donc fausse.

IV Généralisation de l'opérateur de différence et application

IV.A -

1. $x \mapsto x + 1$ est $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
Par composition, $x \mapsto f(x + 1)$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Puis par addition

$$\delta \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ de } \mathbb{R}_+^*$$

Puis pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\delta(f')(x) = f'(x + 1) - f'(x) \text{ et } (\delta(f))'(x) = f'(x + 1) - f'(x)$$

Donc

$$\delta(f') = (\delta(f))'$$

2. Même démonstration qu'en I.B.4),

$$\forall n \in \mathbb{N}, (\delta^n(f))(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x + k)$$

3. Soit $x > 0$.

Appliquons le théorème des accroissements finis à f , de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x, x + 1]$,

$$\exists c \in]x, x + 1[\text{ tel que } \delta(f)(x) = f(x + 1) - f(x) = f'(c) \times (x + 1 - x) = f'(c)$$

En faisant le changement de variable $y_1 = c - x$,

$$\text{pour tout } x > 0, \text{ il existe } y_1 \in]0, 1[\text{ tel que } \delta(f)(x) = f(x + y_1)$$

4. Nous allons procéder par récurrence. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathcal{P}_n : \ll \forall x > 0, \forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*), \exists y_n \in]0, n[\text{ tel que } \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f(x + j) = f^{(n)}(x + y_n) \gg$$

- La réponse de IV.A.3) montre que $\mathcal{P}_1$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie.
Soit $x > 0$, il existe $y_n \in]0, n[$ ($\mathcal{P}_n$ à δf) tel que :

$$\delta^{n+1}(f)(x) = \delta^n(\delta f)(x) = (\delta f)^{(n)}(x + y_n)$$

Puis par commutation de l'opération différence et dérivation :

$$\delta^{n+1}(f)(x) = (\delta f)^{(n)}(x + y_n) = \delta(f^{(n)})(x + y_n) = f^{(n)}(x + y_n + 1) - f^{(n)}(x + y_n)$$

On applique l'égalité des accroissements finis à $f^{(n)}$, il existe $c \in]x + y_n, x + y_n + 1[$ tel que

$$f^{(n)}(x + y_n + 1) - f^{(n)}(x + y_n) = (f^{(n)})'(c) \times ((x + y_n + 1) - (x + y_n)) = f^{(n+1)}(c)$$

Enfin, d'après IV.A.2) :

$$\delta^{n+1}(f)(x) = \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^{n+1-j} \binom{n+1}{j} f(x + j) = f^{(n+1)}(c)$$

En prenant $y_{n+1} = c - x$, alors $y_{n+1} \geq x + y_n - x \geq y_n \geq 0$ et $y_{n+1} \leq x + y_n + 1 - x \leq y_n + 1 \leq n + 1$. Ainsi, on a donc $\mathcal{P}_{n+1}$ qui est vérifiée.

Par conséquent,

$$\forall x > 0, \forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*), \forall n \in \mathbb{N}, \exists y_n \in]0, n[\text{ tel que } \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f(x + j) = f^{(n)}(x + y_n)$$

IV.B -

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

Il existe $p_1, \dots, p_i$, i nombres premiers et $a_1, a_2, \dots, a_i \in \mathbb{N}$ tel que $k = \prod_{j=1}^i p_j^{a_j}$.

On a alors

$$k^\alpha = \prod_{j=1}^i (p_j^{a_j})^\alpha = \prod_{j=1}^i (p_j^\alpha)^{a_j}$$

Il s'agit de produit de nombres entiers naturels non nuls, donc

$$k^\alpha \text{ est un nombre entier naturel}$$

2. Si $\alpha < 0$, alors

$$2^\alpha = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\alpha} < 1$$

Or on a vu que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $k^\alpha \in \mathbb{N}^*$, donc $k^\alpha \geq 1$. On a une contradiction,

$$\alpha \in \mathbb{R}_+$$

3. Si α est un entier naturel, alors $f_\alpha^{(\alpha)} = \alpha!$ et donc $f_\alpha^{(\alpha+1)} = 0$;
donc l'une au moins des dérivées de f_α s'annule en au moins un réel strictement positif.
Réciproquement, s'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $x_0 > 0$ tels que $f_\alpha^{(n)}(x_0) = 0$;
or on sait que pour tout réel x ,

$$f_\alpha^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$$

Donc si $f_\alpha^{(n)}(x_0) = 0$, alors comme $x_0 > 0$, on a nécessairement : $\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1) = 0$;
et donc il existe $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que $\alpha - k = 0$ donc $\alpha = k \in \mathbb{N}$. Ainsi :

$$\alpha \in \mathbb{N} \text{ ssi il existe } n \in \mathbb{N} \text{ et } x_0 > 0 \text{ tels que } f_\alpha^{(n)}(x_0) = 0$$

IV.C -

1. D'après IV.B.1), pour tout k entier, $k^\alpha \in \mathbb{N}$,
donc pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $f_\alpha(x+j) \in \mathbb{N}$ puisque x entier.
Puis par stabilité par multiplication et additions d'entiers :

$$\sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f_\alpha(x+j) \in \mathbb{N}$$

2. On applique directement la relation (IV.1.) :

$$\exists y_n \in]0, n[\text{ tel que } \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f_\alpha(x+j) = f_\alpha^{(n)}(x+y_n) = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-\lfloor \alpha \rfloor)}{(x+y_n)^{\lfloor \alpha \rfloor + 1 - \alpha}}$$

Donc comme $y_n \geq 0$,

$$0 \leq \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f_\alpha(x+j) \leq \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-\lfloor \alpha \rfloor)}{x^{\lfloor \alpha \rfloor + 1 - \alpha}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

3. Comme cette limite pour $x \rightarrow +\infty$ est nulle, on peut prendre $\varepsilon = \frac{1}{2}$; il existe $A > 0$ tel que pour tout $x \geq A$ et entier :

$$\sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f_\alpha(x+j) \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[.$$

Or cette somme est entière, donc elle est nécessairement nulle.

Ainsi, pour tout $x \geq A$, $\sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f_\alpha(x+j) = 0 = f^{(n)}(x+y_n)$.

Donc, une dérivée de f_α s'annule en au moins un réel strictement positif. D'après IV.B.3),

$$\alpha \text{ est donc un entier naturel}$$

Jeux



LAGRANGE



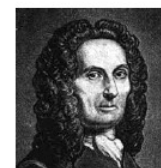
LEIBNIZ



NEWTON



ROLLE



MOIVRE



TAYLOR



SCHMIDT



VANDERMONDE



WALLIS



CESARO



YOUNG



RIEMANN



EUCLIDE



CRAMER



CHASLES



CAUCHY



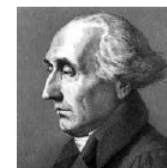
GAUSS



PYTHAGORE



EULER



SARRUS



SCHWARZ



GRAM



BERNOULLI



MACHIN



PCSIUN

