Problème 3 : Endomorphismes vérifiant une équation fonctionnelle

1. (a) Soient (x, y, z, t), $(x', y', z', t') \in \mathbb{R}^4$, soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda(x,y,z,t)+\mu(x',y',z',t')) &= (2(\lambda x+\mu x')-(\lambda z+\mu z')+(\lambda t+\mu t'), -2(\lambda x+\mu x')+(\lambda z+\mu z')-(\lambda t+\mu t'),\\ &\quad -(\lambda y+\mu y')+(\lambda t+\mu t'), -2(\lambda x+\mu x')-(\lambda y+\mu y')+(\lambda z+\mu z'))\\ &= \lambda(2x-z+t,-2x+z-t,-y+t,-2x-y+z)\\ &\quad +\mu(2x'-z'+t',-2x'+z'-t',-y'+t',-2x'-y'+z')\\ &= \lambda\varphi(x,y,z,t)+\mu\varphi(x',y',z',t').\end{aligned}$$

Donc :

$$\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4).$$

(b) • Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$,

$$\begin{aligned}(x,y,z,t)\in\ker\varphi &\iff \begin{cases} 2x-z+t=0\\ -2x+z-t=0\\ -y+t=0\\ -2x-y+z=0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases} 2x-z+t=0\\ y=t\end{cases}\\ &\iff \begin{cases} z=2x+t\\ y=t\end{cases}\end{aligned}$$

Donc :

$$\ker\varphi = \{(x,t,2x+t,t),\ t\in\mathbb{R}\} \qquad = \mathrm{Vect}\,(e_1,e_2),$$

avec $e_1 = (1, 0, 2, 0)$ et $e_2 = (0, 1, 1, 1)$.
Comme e_1 et e_2 ne sont pas colinéaires, (e_1, e_2) est une base de $\ker\varphi$.

• $((1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1))$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^4$ donc :

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\,\varphi\mathrm{Vect}\,&(\varphi(1,0,0,0),\varphi(0,1,0,0),\varphi(0,0,1,0),\varphi(0,0,0,1))\\ &= \mathrm{Vect}\,((2,-2,0,-2),(0,0,-1,-1),(-1,1,0,1),(1,-1,1,0))\\ &= \mathrm{Vect}\,((0,0,-1,-1),(-1,1,0,1),(1,-1,1,0)) \quad \text{car } (2,-2,0,-2)=2(1,-1,1,0)\\ &= \mathrm{Vect}\,((0,0,-1,-1),(-1,1,0,1)) \quad \text{car } (1,-1,1,0)=-(0,0,-1,-1)-(-1,1,0,1)\\ &= \mathrm{Vect}\,(e_3,e_4),\end{aligned}$$

avec $e_3 = (0, 0, -1, -1)$ et $e_4 = (-1, 1, 0, 1)$.
Comme e_3 et e_4 ne sont pas colinéaires, (e_3, e_4) est une base de $\mathrm{Im}\,\varphi$.

(c) Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$,

$$\begin{aligned}\varphi\circ\varphi(x,y,z,t) &= (2(2x-z+t)-(-y+t)+(-2x-y+z), -2(2x-z+t)+(-y+t)-(-2x-y+z),\\ &\quad -(-2x+z-t)+(-2x-y+z), -2(2x-z+t)-(-2x+z-t)+(-y+t))\\ &= (2x-z+t,-2x+z-t,-y+t,-2x-y+z)\\ &= \varphi(x,y,z,t)\end{aligned}$$

Donc $\varphi\circ\varphi = \varphi$ et φ est un projecteur.

(d)

$$\begin{aligned}f\circ f &= (3\varphi - Id_E)\circ(3\varphi - Id_E)\\ &= 9\varphi\circ\varphi - 6\varphi + Id_E\\ &= 9\varphi - 6\varphi + Id_E = 3\varphi + Id_E\\ &= 3\varphi - Id_E + 2Id_E\\ &= f + 2Id_E.\end{aligned}$$

Donc f vérifie $(*)$.

2. (a) i.
- $g \circ h = (f - 2Id_E) \circ (f + Id_E) = f \circ f - f - 2Id_E = 0$,
- $h \circ g = (f + Id_E) \circ (f - 2Id_E) = f \circ f - f - 2Id_E = 0$,

Donc :

$$g \circ h = h \circ g = 0.$$

ii.
- Soit $y \in \operatorname{Im} h$, il existe $x \in E$ tel que $y = h(x)$.
  On a : $g(y) = g \circ h(x) = 0_E$.
  Ainsi, $y \in \ker g$. Donc :

$$\operatorname{Im} h \subset \ker g.$$

- Comme g et h jouent un rôle symétrique, on a :

$$\operatorname{Im} g \subset \ker h.$$

(b) i. Comme $\operatorname{Im} h \subset \ker g$, on a : $\dim(\operatorname{Im} h) \leq \dim(\ker g)$.
Ainsi : $\dim(\operatorname{Im} h) \dim(\ker h) \leq \dim(\ker g) \dim(\ker h)$.
Or, d'après le théorème du rang : $\dim(\operatorname{Im} h) \dim(\ker h) = \dim(E) = n$, donc :

$$\dim(\ker g) + \dim(\ker h) \geq n.$$

ii. Soit $x \in \ker g \cap \ker h$.
On a : $g(x) = 0_E$ et $h(x) = 0_E$ donc $f(x) = 2x$ et $f(x) = -x$. Ainsi $2x = -x$ et donc $x = 0_E$. D'où :

$$\ker g \cap \ker h = \{0_E\}.$$

iii. On a : $n \leq \dim(\ker g) + \dim(\ker h) = \dim(\ker g \oplus \ker h)$.
Donc $\dim(\ker g \oplus \ker h) = n = \dim E$, ainsi :

$$\ker g \oplus \ker = E.$$

(c) i.
- Soit $x \in \ker g$, on a $f(x) = 2x$, $p(x) = x$ et $q(x) = 0_E$.
  Ainsi : $h(x) = 2x + x = 3x = 3p(x)$ et $g(x) = 2x - 2x = 0_E = -3q(x)$.
- Soit $x \in \ker h$, on a $f(x) = -x$, $p(x) = 0_E$ et $q(x) = x$.
  Ainsi : $h(x) = -x + x = 0_E = 3p(x)$ et $g(x) = -x - 2x = -3x = -3q(x)$.
- Comme $\ker g \oplus \ker = E$ et $g, h, 3p, -3q \in \mathcal{L}(E)$, on a :

$$h = 3p \text{ et } g = -3q.$$

ii. Soit $x \in E$, $q(x) \in \operatorname{Im} q = \ker h = \ker p$ donc : $p \circ q(x) = 0_E$.
De même, par symétrie $q \circ p(x) = 0_E$. Donc :

$$p \circ q = q \circ p = 0.$$

iii. Soit $m \in \mathbb{N}^*$,
- On a $g + 2h = 3f$ donc $-3q + 6p = 3f$, ainsi : $f = 2p - q$.
- Comme $p \circ q = q \circ p$, d'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$\begin{aligned}
f^m &= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (2p)^k \circ (-q)^{m-k} \\
&= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} 2^k (-1)^{m-k} p^k \circ q^{m-k} \\
&= (-1)^m q^m + \sum_{k=1}^{m-1} \binom{m}{k} 2^k (-1)^{m-k} p^{k-1} \circ p \circ q \circ q^{m-k-1} + 2^m p^m \\
&= (-1)^m q^m + 2^m p^m \quad \text{car } p \circ q = 0 \\
&= (-1)^m q + 2^m p \quad \text{car } p^2 = p \text{ et } q^2 = q.
\end{aligned}$$