Problème 2 : Formule de quadrature

1. (a)
   - Soit $P \in \mathbb{R}_0[X]$, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $P = a$.
     On a $I_0(P) = P(0) = a$ et $\int_0^1 P(x)\,dx = a$. Donc :
     $$I_0(P) = \int_0^1 P(x)\,dx.$$
   - Posons $P = X$, on a : $I_0(P) = P(0) = 0$ et $\int_0^1 P(x)\,dx = \frac{1}{2}$. Donc :
     $$I_0(P) \neq \int_0^1 P(x)\,dx.$$
   - Ainsi la formule de quadrature $I_0(f) = f(0)$ est d'ordre 0.

   (b)
   - Soit $P \in \mathbb{R}_1[X]$, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $P = aX + b$.
     On a $I_0(P) = P(\frac{1}{2}) = \frac{a}{2} + b$ et $\int_0^1 P(x)\,dx = \left[a\frac{x^2}{2} + bx\right]_0^1 = \frac{a}{2} + b$. Donc :
     $$I_0(P) = \int_0^1 P(x)\,dx.$$
   - Posons $P = X^2$, on a : $I_0(P) = P(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$ et $\int_0^1 P(x)\,dx = \frac{1}{3}$. Donc :
     $$I_0(P) \neq \int_0^1 P(x)\,dx.$$
   - Ainsi la formule de quadrature $I_0(f) = f(\frac{1}{2})$ est d'ordre 1.

   (c)
   - Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$,
     $$\begin{aligned} I_2(P) = \int_0^1 P(x = dx &\Longleftrightarrow \lambda_0 c + \lambda_1(\frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c) + \lambda_2(a + b + c) = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c \\ &\Longleftrightarrow a(\frac{\lambda_1}{4} + \lambda_2 - \frac{1}{3}) + b(\frac{\lambda_1}{2} + \lambda_2 - \frac{1}{2}) + c(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 - 1) = 0 \end{aligned}$$
     Donc, la formule est exacte sur $\mathbb{R}_2[X]$ ssi :
     $$(S)\left\{\begin{array}{rcl} \frac{\lambda_1}{4} + \lambda_2 - \frac{1}{3} & = & 0 \\ \frac{\lambda_1}{2} + \lambda_2 - \frac{1}{2} & = & 0 \\ \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 - 1 & = & 0 \end{array}\right.$$
     Or :
     $$(S) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} -\frac{\lambda_1}{4} + \frac{1}{6} & = & 0 & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ \frac{\lambda_1}{2} + \lambda_2 - \frac{b}{2} & = & 0 & \\ \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 - 1 & = & 0 & \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & \frac{2}{3} \\ \lambda_2 & = & \frac{1}{6} \\ \lambda_0 & = & \frac{1}{6} \end{array}\right.$$
   - Posons $P = X^3$, $I_2(P) = \frac{1}{6}.0 + \frac{2}{3}.(\frac{1}{6})^3 + \frac{1}{6}.1 = \frac{1}{4}$ et $\int_0^1 P(x)\,dx = \frac{1}{4}$ donc $I_2(P) = \int_0^1 P(x)\,dx$.
   - Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X]$.
     $$\begin{aligned} I_2(P) &= aI_2(X^3) + I_2(bX^2 + cX + d) \\ &= a\int_0^1 x^3\,dx + \int_0^1 (bx^2 + cx + d)\,dx \\ &= \int_0^1 P(x)\,dx. \end{aligned}$$
   - Posons $P = X^4$, $I_2(P) = \frac{1}{6} + \frac{2}{3}.(\frac{1}{6})^4 + \frac{1}{6}.1 = \frac{5}{24}$ et $\int_0^1 P(x)\,dx = \frac{1}{5}$ donc $I_2(P) \neq \int_0^1 P(x)\,dx$.
   - Ainsi la formule est d'ordre 3.

2. (a)
   - φ est clairement linéaire.
   - Soit $P \in \ker\varphi$. Alors $P(x_0) = \cdots = P(x_n) = 0$ donc P admet au moins $n+1$ racines distinctes. Or $\deg P \leq n$ donc $P = 0$.
     Ainsi $\ker\varphi = \{0\}$ donc φ est injective.
   - $\dim\mathbb{R}_n[X] = n + 1 = \dim\mathbb{R}^{n+1}$.
   - Donc φ est un isomorphisme.

(b) Soit $i \in [\![0,n]\!]$, soit $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$.

$$\forall j \in [\![0,n]\!], \quad L_i(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i, \\ 1 & \text{si } j = i. \end{cases} \iff \varphi(L_i) = (0,\dots,1,\dots,0) \text{ (le 1 étant en position i)}$$
$$\iff L_i = \varphi^{-1}(0,\dots,1,\dots,0).$$

D'où l'existence et l'unicité de L_i.

(c) Soit $(e_0,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On a : $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $L_i = \varphi^{-1}(e_i)$.
Or, $(e_0,\dots,e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ et φ^{-1} est un isomorphisme.
Ainsi : $(L_0,\dots,L_n) = (\varphi^{-1}(e_0),\dots,\varphi^{-1}(e_n))$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

(d)

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \int_a^b P(x)\omega(x)\,dx = \sum_{j=0}^n \lambda_j P(x_j) \iff \forall i \in [\![0,n]\!], \int_a^b L_i(x)\omega(x)\,dx = \sum_{j=0}^n \lambda_j L_i(x_j)$$

car $(L_0,\dots,L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$ et $P \mapsto \int_a^b P(x)\omega(x)\,dx, P \mapsto \sum_{j=0}^n \lambda_j P(x_j)$ sont linéaires.

$$\iff \forall i \in [\![0,n]\!], \int_a^b L_i(x)\omega(x)\,dx = \lambda_i$$
$$\iff \forall j \in [\![0,n]\!], \quad \lambda_j = \int_a^b L_j(x)w(x)dx.$$

(e)
- L_0 est de degré inférieur ou égal à 2 et admet $\frac{1}{2}$ et 1 comme racines donc $L_0 = \lambda(X-\frac{1}{2})(X-1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
De plus $L_0(0) = 1$ donc $\lambda = 2$. Ainsi :
$$L_0 = 2(X-\frac{1}{2})(X-1) = 2X^2 - 3X + 1.$$
- L_1 est de degré inférieur ou égal à 2 et admet 0 et 1 comme racines donc $L_1 = \lambda X(X-1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
De plus $L_1(\frac{1}{2}) = 1$ donc $\lambda = -4$. Ainsi :
$$L_1 = -4X-(X-1) = -4X^2 + 4X.$$
- L_2 est de degré inférieur ou égal à 2 et admet 0 et $\frac{1}{2}$ comme racines donc $L_2 = \lambda X(X-\frac{1}{2})$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
De plus $L_2(1) = 1$ donc $\lambda = 2$. Ainsi :
$$L_2 = 2X(X-\frac{1}{2}) = 2X^2 - X.$$
- $\lambda_0 = \int_0^1 L_0(x)\,dx = \frac{2}{3} - \frac{3}{2} + 1 = \frac{1}{6}$
- $\lambda_1 = \int_0^1 L_1(x)\,dx = -\frac{4}{3} + \frac{4}{2} = \frac{2}{3}$
- $\lambda_2 = \int_0^1 L_2(x)\,dx = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

3. (a) Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. On effectue le changement de variable $y = (d-c)x + c$, on a $dy = (d-c)dx$.

$$\begin{aligned}\int_c^d P(y)\,dy &= \int_0^1 P((d-c)x+c).(d-c)dx \\ &= (d-c)\int_0^1 Q(x)\,dx \text{ où } Q(X) = P((d-c)X+c) \in \mathbb{R}_2[X] \\ &= \frac{d-c}{6}\left(Q(0)+Q(1)+4Q(\frac{1}{2})\right) \\ &= \frac{d-c}{6}\left(P(c)+P(d)+4P\left(\frac{c+d}{2}\right)\right).\end{aligned}$$

(b) i.
- f est $\mathcal{C}^3$ donc $h \mapsto \int_c^{c+h} f(y)\,dy$ est $\mathcal{C}^3$ et $h \mapsto f(c+\frac{h}{2})$ est $\mathcal{C}^3$, donc Φ est $\mathcal{C}^2$ sur $[0, d-c]$.
- Soit $h \in [0, d-c]$,

$$\begin{aligned}\Phi'(h) &= f(c+h) - \frac{1}{6}(f(c)+f(c+h)+4f(c+\frac{h}{2}) - \frac{h}{6}(f'(c+h)+2f'(c+\frac{h}{2}) \\ &= -\frac{1}{6}(f(c)-5f(c+h)+4f(c+\frac{h}{2}) - \frac{h}{6}(f'(c+h)+2f'(c+\frac{h}{2})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi''(h) &= \frac{5}{6}f'(c+h) - \frac{1}{3}f'(c+\frac{h}{2}) - \frac{1}{6}(f'(c+h)+2f'(c+\frac{h}{2}) - \frac{h}{6}(f''(c+h)+f''(c+\frac{h}{2}) \\ &= \frac{2}{3}f'(c+h) - \frac{2}{3}f'(c+\frac{h}{2}) - \frac{h}{6}(f''(c+h)+f''(c+\frac{h}{2})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi'''(h) &= \frac{2}{3}f''(c+h) - \frac{1}{3}f''(c+\frac{h}{2}) - \frac{1}{6}(f''(c+h) + f''(c+\frac{h}{2}) - \frac{h}{6}(f'''(c+h) + \frac{1}{2}f'''(c+\frac{h}{2})\\ &= \frac{1}{2}f''(c+h) - \frac{1}{2}f''(c+\frac{h}{2}) - \frac{h}{6}(f'''(c+h) + \frac{1}{2}f'''(c+\frac{h}{2})\end{aligned}$$

ii.
- f est $\mathcal{C}^3$ sur le segment $[a,b]$ donc f''' est continue sur le segment $[a,b]$. Donc, d'après le théorème des bornes atteintes, il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que : $\forall x \in [a,b]$, $|f'''(x)| \leq k$.
- De plus, d'après l'inégalité des accroissements finis : $\forall x, y \in [a,b]$, $|f''(x) - f''(y)| \leq k|x-y|$.
- Ainsi, soit $h \in [0, d-c]$,

$$\begin{aligned}|\Phi'''(h)| &\leq \frac{1}{2}h|(c+h) - (c+\frac{h}{2})| + \frac{h}{6}(k + \frac{1}{2}k)\\ &\leq \frac{kh}{4} + \frac{kh}{4}\\ &\leq MH \text{ avec } m = \frac{k}{2}.\end{aligned}$$

iii. Soit $h \in [0, d-c]$,

$$\begin{aligned}|\Phi''(h) - \Phi''(0)| &= |\int_0^h \Phi'''(t)\,dt|\\ &\leq \int_0^h |\Phi'''(t)|\,dt\\ &\leq \int_0^h Mt\,dt = \frac{Mh^2}{2}.\end{aligned}$$

Or $\Phi''(0) = 0$ donc :

$$|\Phi''(h)| \leq \frac{M}{2}h^2.$$

iv.
- Soit $h \in [0, d-c]$, on a $\Phi'(0) = 0$ donc :
  $|\Phi'(h)| = |\int_0^h \Phi'''(t)\,dt| \leq M\int_0^h \frac{t^2}{2}\,dt \leq \frac{Mh^3}{6}$.
- Soit $h \in [0, d-c]$, on a $\Phi(0) = 0$ donc :
  $|\Phi(h)| = |\int_0^h \Phi''(t)\,dt| \leq M\int_0^h \frac{t^3}{6}\,dt \leq \frac{Mh^4}{24}$. Ainsi : $|\Phi(d-c)| \leq \frac{M(d-c)^4}{24}$.

Donc :

$$\left|\int_c^d f(y)\,dy - \frac{(d-c)}{6}\left(f(c) + f(d) + 4f\left(\frac{c+d}{2}\right)\right)\right| \leq \frac{M}{24}(d-c)^4.$$

(c) Posons : $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$, $c_i = a + i\frac{b-a}{n}$ et $d_i = a + (i+1)\frac{b-a}{n}$.
Soit $i \in [\![0, n-1]\!]$, comme $\frac{c_i+d_i}{2} = a + (i+\frac{1}{2})\frac{b-a}{n}$, on a, d'après la question précédente :

$$\left|\int_{c_i}^{d_i} f(y)\,dy - \frac{b-a}{6n}\left(f(c_i) + f(d_i) + 4f\left(a + (i+\frac{1}{2})\frac{b-a}{n}\right)\right)\right| \leq \frac{M}{24}\frac{(b-a)^4}{n^4}.$$

De plus, $c_0 = a$, $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$, $d_i = c_{i+1}$, $d_{n-1} = b$, donc : $\displaystyle\int_a^b f(y)\,dy = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{c_i}^{d_i} f(y)\,dy$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(y)\,dy - \frac{b-a}{6n}\sum_{i=0}^{n-1} f_i\right| &= \left|\sum_{i=0}^{n-1}\left(\int_{c_i}^{d_i} f(y)\,dy - \frac{b-a}{6n}f_i\right)\right|\\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1}\left|\int_{c_i}^{d_i} f(y)\,dy - \frac{b-a}{6n}f_i\right|\\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1}\frac{M}{24}\frac{(b-a)^4}{n^4}\\ &\leq \frac{M}{24}\frac{(b-a)^4}{n^3}\end{aligned}$$