

Problème 1 : Étude d'un endomorphisme défini par une intégrale

1.
 - $0 \in \mathcal{E}$ donc $\mathcal{E} \neq \emptyset$.
 - Soient $f, g \in \mathcal{E}$, soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Comme la combinaison linéaire de fonctions continues est continue, on a $\lambda f + \mu g \in \mathcal{E}$.
 - Donc $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Ainsi $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel.
2. Posons $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \int_x^{x+T} f(t) dt$. g est dérivable et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = f(x+T) - f(x) = 0,$$

car f est T -périodique. On a $g' = 0$ donc g est constante sur $\mathbb{R}$. Ainsi : $\forall a \in \mathbb{R}, g(a) = g(0)$. D'où :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \int_a^{a+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt.$$

3.
 - Supposons f T -périodique. On a : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x)$.
Donc, en dérivant : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x+T) = f'(x)$.
Ainsi f est T -périodique.
 - Soit $f : x \mapsto x$. f est dérivable et $f' = 1$ donc f' est T -périodique. Or f n'est pas périodique.
Ainsi, la réciproque est fausse.
4. (a) Si $f = c, c \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$U(f)(x) = \int_{x-1}^x c dt = c(x - (x-1)) = c = f(x).$$

Donc :

$$U(f) = f.$$

- (b) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$U(f)(x) = \int_{x-1}^x e^t dt = [e^t]_{x-1}^x = e^x - e^{x-1}.$$

Donc :

$$U(f) : x \mapsto e^x - e^{x-1}.$$

- (c) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$U(f)(x) = \int_{x-1}^x t e^t dt.$$

On effectue l'intégration par parties :

$$\begin{aligned} u(t) &= t & u'(t) &= 1 \\ v'(t) &= e^t & v(t) &= e^t \end{aligned}$$

On a :

$$U(f)(x) = [t e^t]_{x-1}^x - \int_{x-1}^x e^t dt = x e^x - (x-1) e^{x-1} - (e^x - e^{x-1}).$$

Donc :

$$U(f) : x \mapsto (x-1) e^x - (x-2) e^{x-1}.$$

- (d) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$U(f)(x) = \int_{x-1}^x |t| dt.$$

- Si $x \leq 0$,

$$U(f)(x) = \int_{x-1}^x (-t) dt = \left[-\frac{t^2}{2} \right]_{x-1}^x = -\frac{x^2}{2} + \frac{(x-1)^2}{2} = \frac{1-2x}{2}.$$

- Si $x \geq 1$,

$$U(f)(x) = \int_{x-1}^x t dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_{x-1}^x = \frac{x^2}{2} - \frac{(x-1)^2}{2} = \frac{2x-1}{2}.$$

- Si $0 < x < 1$,

$$U(f)(x) = \int_{x-1}^0 (-t) dt + \int_0^x t dt = \left[-\frac{t^2}{2} \right]_{x-1}^0 + \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^x = \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{x^2}{2} = \frac{2x^2 - 2x + 1}{2}.$$

Donc :

$$U(f) : x \mapsto \begin{cases} \frac{1-2x}{2} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{2x-1}{2} & \text{si } x \geq 1 \\ \frac{2x^2-2x+1}{2} & \text{si } 0 < x < 1. \end{cases}$$

5. (a) Soit F une primitive de f , alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ et $F' = f$. De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}, U(f)(x) = F(x) - F(x-1).$$

Donc $U(f)$ est $\mathcal{C}^1$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, U(f)'(x) = f(x) - f(x-1).$$

- (b) • $\forall f \in \mathcal{E}, U(f) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \subset \mathcal{E}$.
 • Soient $f, g \in \mathcal{E}$, soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} U(\lambda f + \mu g)(x) &= \int_{x-1}^x (\lambda f + \mu g)(t) dt = \lambda \int_{x-1}^x f(t) dt + \mu \int_{x-1}^x g(t) dt \\ &= \lambda U(f)(x) + \mu U(g)(x). \end{aligned}$$

Donc : $U(\lambda f + \mu g) = \lambda U(f) + \mu U(g)$.

- Ainsi $U \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$.

6. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} U(X^k)(x) &= \int_{x-1}^x t^k dt = \left[\frac{t^{k+1}}{k+1} \right]_{x-1}^x = \frac{x^{k+1} - (x-1)^{k+1}}{k+1} \\ &= \frac{1}{k+1} \left(x^{k+1} - \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} x^j (-1)^{k+1-j} \right) \\ &= \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k \binom{k+1}{j} x^j (-1)^{k-j}. \end{aligned}$$

Donc :

$$U(X^k) = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k \binom{k+1}{j} X^j (-1)^{k-j}.$$

Ainsi $U(X^k)$ est un polynôme de degré k .

- (b) Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in E_n$. Comme U est linéaire : $U(P) = \sum_{k=0}^n a_k U(X^k)$.

Or, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $U(X^k) \in E_n$, donc :

$$U(P) \in E_n.$$

- (c) D'après 6.(a), $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\deg(U(X^k)) = k$ donc $(U(X^k))_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est une base de E_n .

Ainsi, l'image de la base canonique de E_n par U_n est une base de E_n donc :

$$U_n \in GL(E_n).$$

7. (a) (i) $f \in \ker(U)$ donc : $\forall x \in \mathbb{R}, \int_{x-1}^x f(t) dt = 0$.

En particulier, pour $x = 1$, on a :

$$\int_0^1 f(t) dt = 0.$$

- (ii) $f \in \ker(U)$ donc $U(f) = 0$ et ainsi $U(f)' = 0$.

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - f(x-1) = 0$.

D'où : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x-1)$.

Ainsi : f est périodique de période 1.

- (b) • D'après la question précédente, $\ker(U) \subset \left\{ f \in \mathcal{E}, \text{périodique de période 1 et telle que } \int_0^1 f(t) dt = 0 \right\}$.

- Soit $f \in \mathcal{E}$, périodique de période 1 et telle que $\int_0^1 f(t) dt = 0$.

Alors, d'après 2. appliquée à $a = x-1$ et $T = 1$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_{x-1}^x f(t) dt = \int_0^1 f(t) dt = 0.$$

Donc $U(f) = 0$ et $f \in \ker(U)$. Ainsi :

$$\left\{ f \in \mathcal{E}, \text{périodique de période 1 et telle que } \int_0^1 f(t) dt = 0 \right\} \subset \ker(U).$$

- Donc :

$$\ker(U) = \left\{ f \in \mathcal{E}, \text{périodique de période 1 et telle que } \int_0^1 f(t) dt = 0 \right\}.$$

(c) On a :

- $f \in \mathcal{E}$,
- $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) = \cos(2\pi(x+1)) = \cos(2\pi x) = f(x)$.
Donc f est 2π -périodique.
- $\int_0^1 f(t) dt = \left[\frac{\sin(2\pi t)}{2\pi} \right]_0^1 = 0$.

Donc, d'après la question précédente, $f \in \ker(U)$.

(d) Comme $f \neq 0$, on a $\ker(U) \neq \{0\}$ donc U n'est pas injectif.

8. D'après 5.a, $\text{Im}(U) \subset \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ or $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \not\subset \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ donc $\text{Im}(U) \neq \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.

Ainsi, U n'est pas surjectif.

