Correction de la séance 9

Limites d'intégrales

Exercice de calcul *(Chapitre 25, exemple 11)*

- $\|1\| = \sqrt{\int_0^1 t.1^2\, dt} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
  Posons $f_1 = \sqrt{2}$.
- $g_1 = X - (X|f_1)f_1 = X - 2\int_0^1 t.t\, dt = X - \frac{2}{3}$.

$$\begin{aligned}\|X - \frac{2}{3}\| &= \sqrt{\int_0^1 t.(t-\frac{2}{3})^2\, dt}\\ &= \sqrt{\int_0^1 (t^3 - \frac{4}{3}t^2 + \frac{4}{9}t)\, dt}\\ &= \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{4}{9}t + \frac{2}{9}}\\ &= \sqrt{\frac{1}{36}} = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

  Posons $f_2 = 6(X - \frac{2}{3})$.
- (f_1, f_2) est l'orthonormalisation de la base canonique.

Inégalité

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^+$. On a :

- si $x \leq 1$, $\left|f_n(x)\right| = \dfrac{x^n}{x^{n+2}+1} \leq x^n \leq 1$,
- si $x > 1$, $\left|f_n(x)\right| = \dfrac{x^n}{x^{n+2}+1} \leq \dfrac{x^n}{x^{n+2}} \leq \dfrac{1}{x^2}$.

Posons $g : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } x > 1. \end{cases}$. Alors g est continue sur $\mathbb{R}^+$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\left|f_n(x)\right| \leq g(x)$ et $g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$ donc g convient.

Exercice 16 *(Chapitre 18, exemple 1)*

f est continue sur le segment $[0,1]$ ainsi, d'après le théorème des bornes atteintes, il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que : $\forall x \in [0,1]$, $|f(x)| \leq M$. Ainsi, soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|\int_0^1 t^n f(t)\, dt\right| \leq \int_0^1 t^n \left|f(t)\right|\, dt \leq \int_0^1 t^n M\, dt \leq \frac{M}{n+1}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{M}{n+1} = 0$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 t^n f(t)\,dt = 0.$$

Exercice 17 *(Chapitre 18, exemple 2)*

Soit f une fonction de classe $\mathbb{C}^1$ sur $[a,b]$.
On effectue l'intégration par parties :

$$\begin{array}{ll} u(t) = f(t) & u'(t) = f'(t) \\ v'(t) = \sin(nt) & v(t) = -\frac{1}{n}\cos(nt) \end{array}$$

On a :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t)\sin(nt)dt &= \left[-\frac{f(t)\cos(nt)}{n}\right]_a^b + \frac{1}{n}\int_a^b f'(t)\cos(nt)dt \\ &= -\frac{f(b)\cos(nb) + f(a)\cos(na)}{n} + \frac{1}{n}\int_a^b f'(t)\cos(nt)dt \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\left|\int_a^b f(t)\sin(nt)dt\right| \leq \frac{|f(b)|+|f(a)|}{n} + \frac{1}{n}\int_a^b |f'(t)|dt \leq \frac{|f(b)|+|f(a)|+\int_a^b |f'(t)|dt}{n}.$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{|f(b)|+|f(a)|+\int_a^b |f'(t)|dt}{n}\right) = 0$ donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin(nt)dt = 0.$$

Exercice 18 *(Chapitre 18, exemple 3)*

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\,dt = \int_x^{2x} \frac{e^t-1}{t}\,dt + \int_x^{2x} \frac{1}{t}\,dt = \int_x^{2x}\frac{e^t-1}{t}\,dt + \ln 2.$$

Or $\frac{e^t-1}{t} \underset{0}{=} 1 + o(1)$ et, soit F une primitive de $t \mapsto \begin{cases} \frac{e^t-1}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$, on a :

$$F(x) \underset{0}{=} F(0) + x + o(x).$$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0} F(x) = 0$. Or

$$\int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\,dt = F(x) - F(0) + \ln 2.$$

Donc :

$$\lim_{x\to 0}\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}\,dt = \ln 2.$$

Exercice 19 *(Chapitre 18, exercice 10)*

Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la limite de f en $+\infty$, il existe $A \geq 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x \geq A \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $x \geq A$

$$\begin{aligned}
|F(x) - l| &= \left|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt - l\right| \\
&= \left|\frac{1}{x}\int_0^x (f(t) - l)dt\right| \\
&= \left|\frac{1}{x}\int_0^A (f(t) - l)dt + \frac{1}{x}\int_A^x (f(t) - l)dt\right| \\
&\leq \left|\frac{1}{x}\int_0^A (f(t) - l)dt\right| + \left|\frac{1}{x}\int_A^x (f(t) - l)dt\right|
\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{x}\int_A^x (f(t) - l)dt\right| &\leq \left|\frac{1}{x}\int_A^x |f(t) - l|dt\right| \\
&\leq \frac{1}{|x|}\left|\int_A^x \varepsilon dt\right| \\
&\leq \varepsilon\frac{|x - A|}{|x|} \\
&\leq \varepsilon\frac{x - A}{x} \qquad \text{car } x \geq A \text{ et } x > 0 \\
&\leq \varepsilon\frac{x}{x} \\
&\leq \varepsilon
\end{aligned}$$

De plus, $\left|\int_0^A (f(t) - l)dt\right|$ est une constante (ne dépend pas de x). Ainsi, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left|\int_0^A (f(t) - l)dt\right| \frac{1}{|x|} = 0$.
Donc il existe $B \geq 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x \geq B \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{1}{x}\int_0^A (f(t) - l)dt\right| \leq \varepsilon.$$

Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x \geq \max(A, B) \quad \Longrightarrow \quad |F(x) - l| \leq 2\varepsilon$$

Finalement, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = l$.