

Déterminants



 Exercice de calcul (Chapitre 16, exemple 8)

1.

$$\begin{aligned}
 \frac{\cos x}{1 + \sin x} &\underset{0}{=} \frac{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)}{1 + x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)} \\
 &\underset{0}{=} \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \left(1 - x + \frac{x^3}{6} + (x - \frac{x^3}{6})^2 - (x - \frac{x^3}{6})^3\right) + o(x^3) \\
 &\underset{0}{=} \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \left(1 - x + \frac{x^3}{6} + x^2 - x^3\right) + o(x^3) \\
 &\underset{0}{=} \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \left(1 - x + x^2 - \frac{5x^3}{6}\right) + o(x^3) \\
 &\underset{0}{=} 1 - x + x^2 - \frac{5x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3) \\
 &\underset{0}{=} 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)
 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
 \frac{x^2}{\operatorname{sh}^2 x} &\underset{0}{=} \frac{x^2}{(x + \frac{x^3}{6} + o(x^4))^2} \\
 &\underset{0}{=} \frac{1}{(1 + \frac{x^2}{6} + o(x^3))^2} \\
 &\underset{0}{=} (1 + \frac{x^2}{6} + o(x^3))^{-2} \\
 &\underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{3} + o(x^3)
 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
 \frac{e^x - 1 - x}{\ln(1+x)} &\underset{0}{=} \frac{\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)}{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)} \\
 &\underset{0}{=} x \times \frac{\frac{1}{2} + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{24} + o(x^2)}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)} \\
 &\underset{0}{=} x \left(\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{24} \right) \left(1 - \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} \right) + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} \right)^2 \right) + o(x^2) \right) \\
 &\underset{0}{=} x \left(\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{24} \right) \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{4} \right) + o(x^2) \right) \\
 &\underset{0}{=} x \left(\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{24} \right) \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} \right) + o(x^2) \right) \\
 &\underset{0}{=} x \left(\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} \right) x + \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{12} - \frac{1}{24} \right) x^2 + o(x^2) \right) \\
 &\underset{0}{=} x \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{12} x + \frac{1}{12} x^2 + o(x^2) \right) \\
 &\underset{0}{=} \frac{1}{2} x + \frac{5}{12} x^2 + \frac{1}{12} x^3 + o(x^3)
 \end{aligned}$$

Inégalité

Soit $(x, t) \in [a, b] \times [0, 1]$, on a : $\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \frac{-2x(1+t^2)e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} = -2xe^{-x^2(1+t^2)}$. Donc :

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right| = 2xe^{-x^2(1+t^2)} \leq 2x \leq 2b.$$



Exercice 15 (Chapitre 24, exemple 8)

Pour tout $n \geq 2$, on note :

$$\mathcal{P}(n) : \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}, V(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Montrons par récurrence que pour tout $n \geq 2$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

- pour $n = 2$: soient $x_1, x_2 \in \mathbb{K}$, $V(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$.

Or, $\prod_{1 \leq i < j \leq 2} (x_j - x_i) = x_2 - x_1$.

Ainsi, $\mathcal{P}(2)$ est vraie.

- Soit $n \geq 2$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
Soient $x_1, \dots, x_{n+1} \in \mathbb{K}$.

$$V(x_1, \dots, x_{n+1}) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \dots & x_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

Pour tout k allant de $n+1$ à 2 et dans cet ordre, on effectue $C_k \leftarrow C_k - x_1 C_{k-1}$. Le déterminant est inchangé. Ainsi :

$$V(x_1, \dots, x_{n+1}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2(x_2 - x_1) & \dots & x_2^{n-1}(x_2 - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} - x_1 & x_{n+1}(x_{n+1} - x_1) & \dots & x_{n+1}^{n-1}(x_{n+1} - x_1) \end{vmatrix}$$

En développant suivant la première ligne, on obtient :

$$V(x_1, \dots, x_{n+1}) = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2(x_2 - x_1) & \dots & x_2^{n-1}(x_2 - x_1) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{n+1} - x_1 & x_{n+1}(x_{n+1} - x_1) & \dots & x_{n+1}^{n-1}(x_{n+1} - x_1) \end{vmatrix}$$

Par linéarité du déterminant par rapport à chacun des lignes, on obtient :

$$\begin{aligned} V(x_1, \dots, x_{n+1}) &= \prod_{j=2}^{n+1} (x_j - x_1) \times \begin{vmatrix} 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & \dots & x_{n+1}^{n-1} \end{vmatrix} \\ &= \prod_{j=2}^{n+1} (x_j - x_1) V(x_2, \dots, x_{n+1}) \\ &= \prod_{j=2}^{n+1} (x_j - x_1) \prod_{2 \leq i < j \leq n+1} (x_j - x_i) \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (x_j - x_i) \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- On a donc prouvé par récurrence que pour tout $n \geq 2$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.



Problème 7 (Problème (donnée en cours) : Déterminants et produits scalaires)

Partie 1 :

$$1. \quad G(u, v) = \begin{vmatrix} (u|u) & (u|v) \\ (v|u) & (v|v) \end{vmatrix} = (u|u)(v|v) - (u|v)(v|u) = \|u\|^2 \|v\|^2 - (u|v)^2$$

Or, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|(u|v)| \leq \|u\| \|v\|$$

$$\text{Donc } (u|v)^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2.$$

Donc :

$$G(u, v) \geq 0$$

$$\bullet \quad G(u, 0) = 0 \Leftrightarrow (u|v)^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 \Leftrightarrow |(u|v)| = \|u\| \|v\|.$$

Donc, d'après le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$G(u, v) = 0$ ssi u et v sont colinéaires.

$$2. \quad (a) \quad \text{On a } (u|w) = (v|w) = 0 \text{ Donc :}$$

$$G(u, v, w) = \begin{vmatrix} \|u\|^2 & (u|v) & 0 \\ (u|v) & \|v\|^2 & 0 \\ 0 & 0 & \|w\|^2 \end{vmatrix} = \|w\|^2 \begin{vmatrix} \|u\|^2 & (u|v) \\ (u|v) & \|v\|^2 \end{vmatrix}$$

$$\text{Donc } G(u, v, w) = \|w\|^2 G(u, v).$$

(b) Il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $w = \lambda u + \mu v$.

$$G(u, v, w) = \begin{vmatrix} (u|u) & (u|v) & (u|w) \\ (v|u) & (v|v) & (v|w) \\ (\lambda u + \mu v|u) & (\lambda u + \mu v|v) & (\lambda u + \mu v|w) \end{vmatrix}$$

En utilisant la linéarité par rapport à la dernière ligne :

$$G(u, v, w) = \lambda \begin{vmatrix} (u|u) & (u|v) & (u|w) \\ (v|u) & (v|v) & (v|w) \\ (u|u) & (u|v) & (u|w) \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} (u|u) & (u|v) & (u|w) \\ (v|u) & (v|v) & (v|w) \\ (v|u) & (v|v) & (v|w) \end{vmatrix}$$

Or les 1^{ère} et 3^{ème} lignes du premier déterminant sont égales et les 2^{ème} et 3^{ème} lignes du second déterminant sont égales.

Donc : $G(u, v, w) = 0$.

(c)

$$G(u, v, w) = \begin{vmatrix} (u|u) & (u|v) & (u|t) \\ (v|u) & (v|v) & (v|t) \\ (t|u) & (t|v) & (n|n) + (t|t) \end{vmatrix}$$

car $(t|n) = (n|t) = 0$ et $(u|n) = (v|n)$.

En utilisant la linéarité par rapport à la dernière colonne :

$$\begin{aligned} a(u, v, w) &= \begin{vmatrix} (u|u) & (u|v) & (u|t) \\ (v|u) & (v|v) & (v|t) \\ (t|u) & (t|v) & (t|t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (u|u) & (u|v) & 0 \\ (v|u) & (v|v) & 0 \\ (t|u) & (t|v) & (n|n) \end{vmatrix} \\ &= G(u, v, t) + \|n\|^2 G(u, v) \end{aligned}$$

Or, d'après 2.b $G(u, v, t) = 0$, donc :

$$G(u, v, w) = \|n\|^2 G(u, v).$$

- (d)
- Comme $\text{Vect}(u, v) \oplus \text{Vect}(u, v)^\perp = E$, tout vecteur w est de la forme de la question précédente.
 - Si (u, v, w) libre, alors u et v sont non colinéaires. Donc $G(u, v) \neq 0$ d'après 1.
De plus, si $n = 0$, alors $w = t \in \text{Vect}(u, v)$. Donc (u, v, w) liée.
Donc $n \neq 0$, ainsi $\|n\| \neq 0$.
Donc $G(u, v, w) \neq 0$
 - Si $G(u, v, w) \neq 0$, alors $G(u, v) \neq 0$ et $\|n\|^2 \neq 0$. " Si (u, v, w) liée, alors il existe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0$ et $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq (0, 0, 0)$
 - Si $\lambda_3 = 0$, alors $\lambda_1 u + \lambda_2 v = 0$.
Or $G(u, v) \neq 0$ donc u et v non colinéaires donc $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ce qui est absurde.
 - On a donc $\lambda_3 \neq 0$. Donc $w = -\frac{\lambda_1 u + \lambda_2 v}{\lambda_3}$. Ainsi w est combinaison linéaire de u et v .
D'où $w = t$ et $n = 0$ ce qui contredit $\|n\|^2 \neq 0$.
Donc (u, v, w) libre.

Ainsi (u, v, w) libre ssi $G(u, v, w) \neq 0$.

Partie 2 :

1. Il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$ tel que :

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j u_j = 0.$$

Donc : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n \lambda_j (u_i | u_j) = 0$.

Posons C_1, C_n les colonnes de $\text{Gram}(u_1, \dots, u_n)$.

Alors : $\sum_{j=1}^n \lambda_j C_j = 0$, donc $(C_1, \dots, C_n)$ liée.

Donc $\text{rg}(\text{Gram}(u_1, \dots, u_n)) < n$.

Ainsi $\text{Gram}(u_1, \dots, u_n)$ n'est pas inversible.

D'où $G(u_1, \dots, u_n) = 0$.

2. (a) Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

$$u_j = \sum_{k=1}^n a_{k,j} e_k.$$

Donc :

$$\begin{aligned}
 (u_i | u_j) &= \left(\sum_{l=1}^n a_{l,i} e_l \mid \sum_{k=1}^n a_{k,j} e_k \right) \\
 &= \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n a_{l,i} a_{k,j} (e_l | e_k) \\
 &= \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n a_{l,i} a_{k,j} \delta_{l,k} \\
 &= \sum_{k=1}^n a_{k,i} a_{k,j}
 \end{aligned}$$

D'où :

$$(u_i | u_j) = \sum_{k=1}^n a_{k,i} a_{k,j}.$$

(b) Posons $A^T \cdot A = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ Soient $i, j \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$m_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{k,i} a_{k,j} = (u_i | u_j)$$

Donc :

$$A^T \cdot A = \text{Gram}(u_1, \dots, u_n).$$

(c)

$$G(u_1, \dots, u_n) = \det(A^T \cdot A) = \det(A^T) \cdot \det(A) = \det(A)^2.$$

Comme A est une matrice de passage, $A \in GL_n(\mathbb{R})$ donc $\det A \neq 0$. Ainsi $G(u_1, \dots, u_n) > 0$.

3. (a) Voir cours.

(b) •

$$G(e_1, \dots, e_p, x) = G(e_1, \dots, e_p, x_F + n) = \begin{vmatrix} (e_1 | e_1) & \cdots & (e_1 | e_p) & (e_1 | x_F) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (e_p | e_1) & \cdots & (e_p | e_p) & (e_p | x_F) \\ (x_F | e_1) & \cdots & (x_F | e_p) & \|x_F\|^2 + \|n\|^2 \end{vmatrix}$$

$$\text{car } (x | x) = (x_F + n | x_F + n) = \|x_F\|^2 + 2(n | x_F) + \|n\|^2 = \|x_F\|^2 + \|n\|^2.$$

En utilisant la linéarité par rapport à la dernière colonne :

$$\begin{aligned}
 G(e_1, \dots, e_p, x) &= \begin{vmatrix} (e_1 | e_1) & \cdots & (e_1 | e_p) & (e_p | x_F) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (e_p | e_1) & \cdots & (e_p | e_p) & (e_p | x_F) \\ (x_F | e_1) & \cdots & (x_F | e_p) & \|x_F\|^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (e_1 | e_1) & \cdots & (e_1 | e_p) & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (e_p | e_1) & \cdots & (e_p | e_p) & 0 \\ (x_F | e_1) & \cdots & (x_F | e_p) & \|n\|^2 \end{vmatrix} \\
 &= G(e_1, \dots, e_p, x_F) + \|n\|^2 G(e_1, \dots, e_p)
 \end{aligned}$$

Or $(e_1, \dots, e_p, x_F)$ est liée, donc, d'après 1 : $G(e_1, \dots, e_p, x_F) = 0$. Ainsi :

$$G(e_1, \dots, e_p, x) = \|n\|^2 G(e_1, \dots, e_p).$$

• Comme $(e_1, \dots, e_p)$ est libre, $G(e_1, \dots, e_p) \neq 0$ donc :

$$\|n\|^2 = \frac{G(e_1, \dots, e_p, x)}{G(e_1, \dots, e_p)}.$$

Donc, comme $d(x, F) = \|x\|$, on a :

$$d(x, F) = \sqrt{\frac{G(e_1, \dots, e_p, x)}{G(e_1, \dots, e_p)}}$$

Partie 3 :

1. • φ est clairement bilinéaire et symétrique.

- Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ $\varphi(P, P) = \int_0^1 P(t)^2 dt \geq 0$ et $\varphi(P, P) = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 P(t)^2 dt = 0$, or P^2 est continue et positive donc :

$$\varphi(P, P) = 0 \Leftrightarrow \forall t \in [0, 1], P(t) = 0 \Leftrightarrow P = 0$$

car P admet une infinité de racines.

- Ainsi φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2. (a)

$$\begin{aligned} d &= \inf_{P \in \mathbb{R}_1} [X] \int_0^1 (t^2 - P(t))^2 dt \\ &= \lim_{P \in \mathbb{R}_1[X]} \|x^2 - P\|^2 \\ &= d(X^2, \mathbb{R}_1[X])^2 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{cc} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{array} \right| &= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \\ \left| \begin{array}{ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{array} \right| &= \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{24} - \frac{1}{27} - \frac{1}{16} - \frac{1}{20} \\ &= \dots = \frac{1}{2160} \end{aligned}$$

(c) $(1, X)$ est une base de $\mathbb{R}_1[X]$, donc, d'après II.3.b, $d = \frac{G(1, X, X^2)}{G(1, X)}$. Or :

$$\begin{aligned} (1 | 1) &= 1 & (X | X^2) &= \frac{1}{4} \\ (1 | X) &= \frac{1}{2} & (X | X) &= \frac{1}{3} \\ (1 | X^2) &= \frac{1}{3} & (X^2 | X^2) &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } G(1, X) = \left| \begin{array}{cc} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{array} \right| = \frac{1}{12}$$

$$G(1, X, X^2) = \left| \begin{array}{ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{array} \right| = \frac{1}{2160}$$

Donc :

$$d = \frac{\frac{1}{2160}}{\frac{1}{12}} = \frac{1}{180}.$$