

# Equations fonctionnelles



## Exercice de calcul (Chapitre 7, exemple 12)

Posons :

$$A_n = \sum_{k=0}^n \cos(kt) \text{ et } B_n = \sum_{k=1}^n \sin(kt).$$

- On a  $A_n = \sum_{k=0}^n \operatorname{Re}(e^{ikt}) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^n e^{ikt}\right)$  et  $B_n = \sum_{k=0}^n \operatorname{Im}(e^{ikt}) = \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^n e^{ikt}\right)$ .
- On a :

$$\sum_{k=0}^n e^{ikt} = \sum_{k=0}^n (e^{it})^k$$

Donc :

- si  $e^{it} = 1$ , c'est-à-dire si  $t \equiv 0[2\pi]$ , alors :

$$\sum_{k=0}^n e^{ikt} = \sum_{k=0}^n 1 = n+1$$

Donc :

$$A_n = n+1 \text{ et } B_n = 0.$$

- si  $e^{it} \neq 1$ , c'est-à-dire si  $t \not\equiv 0[2\pi]$ , alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n e^{ikt} &= \frac{1 - (e^{it})^{n+1}}{1 - e^{it}} = \frac{e^{i\frac{(n+1)t}{2}} \left( e^{-i\frac{(n+1)t}{2}} - e^{i\frac{(n+1)t}{2}} \right)}{e^{i\frac{t}{2}} \left( e^{-i\frac{t}{2}} - e^{i\frac{t}{2}} \right)} = \frac{e^{i\frac{(n+1)t}{2}}}{e^{i\frac{t}{2}}} \frac{-2i \sin \frac{(n+1)t}{2}}{-2i \sin \frac{t}{2}} \\ &= e^{i\frac{nt}{2}} \frac{\sin \frac{(n+1)t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \end{aligned}$$

Donc :

$$A_n = \operatorname{Re} \left( e^{i\frac{nt}{2}} \frac{\sin \frac{(n+1)t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right) = \frac{\cos \frac{nt}{2} \sin \frac{(n+1)t}{2}}{\sin \frac{t}{2}}$$

et

$$B_n = \operatorname{Im} \left( e^{i\frac{nt}{2}} \frac{\sin \frac{(n+1)t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right) = \frac{\sin \frac{nt}{2} \sin \frac{(n+1)t}{2}}{\sin \frac{t}{2}}$$



## Inégalité

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in \mathbb{R}$ .

$$|f_n(x) - x| = \left| \frac{nx^3}{1+nx^2} - x \right| = \left| \frac{x}{1+nx^2} \right| = \frac{|x|}{1+nx^2}.$$

Or :

- si  $|x| > \frac{1}{\sqrt{n}}$ , alors  $1 + nx^2 > nx^2 > 0$  donc :

$$|f_n(x) - x| \leq \frac{1}{n|x|} \leq \frac{1}{\sqrt{n}},$$

- si  $|x| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ , alors :

$$|f_n(x) - x| \leq |x| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Posons :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ . On a :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $|f_n(x) - x| \leq u_n$  et  $\lim u_n = 0$  donc  $(u_n)$  convient.



### Problème 5 (Problème supplémentaire 15-1)

1. En appliquant l'hypothèse à  $x = y = 0$ , on a :  $f(0) = f(0) + f(0) + 0$  donc :

$$f(0) = 0.$$

2. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . En appliquant l'hypothèse à  $x$  et  $-x$ , on a :  $f(x - x) = f(x) + f(-x) - x^2$  donc, comme  $f(0) = 0$  :

$$f(-x) = -f(x) + x^2.$$

3. Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

- Pour  $n = 0$ ,  $f(nx) = f(0) = 0$  et  $nf(x) - \frac{1}{2}nx^2 + \frac{1}{2}n^2x^2 = 0$  donc :

$$f(nx) = nf(x) - \frac{1}{2}nx^2 + \frac{1}{2}n^2x^2.$$

- Soit  $n \in \mathbb{N}$  supposons que  $f(nx) = nf(x) - \frac{1}{2}nx^2 + \frac{1}{2}n^2x^2$ . On a :

$$\begin{aligned}
 f((n+1)x) &= f(nx + x) \\
 &= f(nx) + f(x) + nx \cdot x \quad \text{par hypothèse sur } f \\
 &= nf(x) - \frac{1}{2}nx^2 + \frac{1}{2}n^2x^2 + f(x) + nx^2 \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\
 &= (n+1)f(x) + \frac{1}{2}nx^2 + \frac{1}{2}n^2x^2 \\
 &= (n+1)f(x) - \frac{1}{2}(n+1)x^2 + \frac{1}{2}(2n+1)x^2 + \frac{1}{2}n^2x^2 \\
 &= (n+1)f(x) - \frac{1}{2}(n+1)x^2 + \frac{1}{2}(2n+1+n^2)x^2 \\
 &= (n+1)f(x) - \frac{1}{2}(n+1)x^2 + \frac{1}{2}(n+1)^2x^2
 \end{aligned}$$

- Donc, par récurrence :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, f(nx) = nf(x) - \frac{1}{2}nx^2 + \frac{1}{2}n^2x^2.$$

4. Soient  $x \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

- si  $n \in \mathbb{N}$ , le résultat est vrai d'après 3.

- si  $n < 0$ , alors  $-n \in \mathbb{N}$  donc, d'après 3. :

$$f(-nx) = -nf(x) + \frac{1}{2}nx^2 + \frac{1}{2}n^2x^2.$$

Or, d'après 2.  $f(-nx) = -f(nx) + n^2x^2$ . Ainsi :

$$-f(nx) + n^2x^2 = -nf(x) + \frac{1}{2}nx^2 + \frac{1}{2}n^2x^2.$$

Donc :

$$f(nx) = nf(x) - \frac{1}{2}nx^2 + \frac{1}{2}n^2x^2.$$

- Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, f(nx) = nf(x) - \frac{1}{2}nx^2 + \frac{1}{2}n^2x^2.$$

5. Soit  $x \in \mathbb{Q}$ . Il existe  $p \in \mathbb{Z}$  et  $q \in \mathbb{N}^*$  tels que :  $x = \frac{p}{q}$ .

D'après 4 :

$$f(qx) = qf(x) - \frac{1}{2}qx^2 + \frac{1}{2}q^2x^2.$$

Or :

$$f(qx) = f(p) = f(p.1) = pf(1) - \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}p^2.$$

Donc :

$$qf(x) - \frac{1}{2}qx^2 + \frac{1}{2}q^2x^2 = pf(1) - \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}p^2.$$

Donc :

$$qf(x) - \frac{1}{2}\frac{p^2}{q} + \cancel{\frac{1}{2}p^2} = pf(1) - \frac{1}{2}p^2 + \cancel{\frac{1}{2}p^2}.$$

Donc :

$$qf(x) = pf(1) - \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}\frac{p^2}{q}.$$

Ainsi :

$$f(x) = \frac{p}{q}f(1) - \frac{1}{2}\frac{p}{q} + \frac{1}{2}\frac{p^2}{q^2} = xf(1) - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2.$$

Donc :

$$\forall x \in \mathbb{Q}, f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + f(1)x.$$

6. • Posons  $\lambda = f(1) - \frac{1}{2}$ , alors :

$$\forall x \in \mathbb{Q}, f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \lambda x.$$

- Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Il existe  $(x_n)$  suite de rationnels telle que  $\lim x_n = x$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ , comme  $x_n \in \mathbb{Q}$ , alors :

$$f(x_n) = \frac{1}{2}x_n^2 + \lambda x_n.$$

Comme  $f$  est continue,  $\lim f(x_n) = f(x)$  donc, par passage à la limite :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \lambda x.$$

- Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \lambda x.$$

7. • Analyse : Supposons qu'il existe  $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$  telle que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + f(y) + xy.$$

D'après les questions précédentes, il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \lambda x.$$

- Synthèse : Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ , posons  $f : x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + \lambda x$ . Alors  $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$  et, soient  $x, y \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} f(x) + f(y) + xy &= \frac{1}{2}x^2 + \lambda x + \frac{1}{2}y^2 + \lambda y + xy \\ &= \frac{1}{2}(x^2 + 2xy + y^2) + \lambda(x + y) \\ &= \frac{1}{2}(x + y)^2 + \lambda(x + y) \\ &= f(x + y) \end{aligned}$$

Donc  $f$  convient.

- Donc les solutions sont :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{2}x^2 + \lambda x, \quad \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$


---



### Problème 6 (Problème supplémentaire 15-2)

Première méthode :

1. Soit  $f$  la fonction constante nulle.

Il est clair que  $f$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$  et que  $f$  vérifie (1). Ainsi  $f \in E$ .

Donc :

$$E \neq \emptyset$$

2.
  - Comme  $f$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$ , il est clair que  $g$  l'est également.
  - Soient  $x, y \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} g(x) + g(y) &= f(x) - f(0) + f(y) - f(0) \\ &= f(x) + f(y) - 2f(0) \\ &= 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) - 2f(0) \\ &= 2\left(f\left(\frac{x+y}{2}\right) - f(0)\right) \\ &= 2g\left(\frac{x+y}{2}\right) \end{aligned}$$

Ainsi  $g$  vérifie (1).

- D'où :

$$g \in E$$

3. (a) Soit  $x \in \mathbb{R}$ . En prenant  $y = -x$  dans (1), on a :

$$f(x) + f(-x) = 2f(0) = 0.$$

Donc :

$$f(-x) = -f(x).$$

Ainsi  $f$  est impaire.

- (b) Soit  $x \in \mathbb{R}$ , en prenant  $y = x + 2$  dans (1), on a :

$$f(x) + f(x+2) = 2f\left(\frac{x+x+2}{2}\right) = 2f(x+1).$$

Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x+2) = 2f(x+1) - f(x)$$

- (c)
  - Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = f(n)$$

Alors, comme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(n+2) = 2f(n+1) - f(n),$$

on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n.$$

Le polynôme caractéristique associé à cette relation est :

$$X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2.$$

Ainsi, il existe  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda + \mu n.$$

Or  $u_0 = f(0) = 0$ , ainsi  $\lambda = 0$ .

Et  $u_1 = f(1) = a$ , ainsi  $\mu = a$ .

D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = u_n = an.$$

- Soit  $m \in \mathbb{Z}$  tel que  $m < 0$ .

Comme  $f$  est impaire, on a :

$$f(m) = -f(-m)$$

Et comme  $-m \in \mathbb{N}$ , on a , d'après le point précédent :

$$f(-m) = a(-m).$$

Donc :

$$f(m) = -a(-m) = am.$$

- On a alors :

$$\forall m \in \mathbb{Z}, f(m) = am.$$

- (d) • Soit  $x \in \mathbb{R}$ , en prenant  $y = 0$  dans (1), on a :

$$f(x) = 2f\left(\frac{x}{2}\right)$$

Donc :

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}f(x)$$

- Pour  $p = 0$ ,

$$f\left(\frac{1}{2^p}\right) = f(1) = a = \frac{a}{2^p}$$

- Soit  $p \in \mathbb{N}$ , supposons que :

$$f\left(\frac{1}{2^p}\right) = \frac{a}{2^p}.$$

On a :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2^{p+1}}\right) &= f\left(\frac{1/2^p}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2^p}\right) && \text{d'après le premier point} \\ &= \frac{1}{2} \frac{a}{2^p} && \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{a}{2^{p+1}} \end{aligned}$$

- On a donc prouvé par récurrence que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, f\left(\frac{1}{2^p}\right) = \frac{a}{2^p}.$$

- (e) Soit  $n \in \mathbb{Z}$ , montrons par récurrence sur  $p$  que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, f\left(\frac{n}{2^p}\right) = \frac{1}{2^p}f(n).$$

- Pour  $p = 0$ ,

$$f\left(\frac{n}{2^p}\right) = f(n) = \frac{1}{2^p}f(n)$$

- Soit  $p \in \mathbb{N}$ , supposons que :

$$f\left(\frac{n}{2^p}\right) = \frac{1}{2^p}f(n).$$

On a :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{n}{2^{p+1}}\right) &= f\left(\frac{n/2^p}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}f\left(\frac{n}{2^p}\right) && \text{d'après le premier point} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{2^p}f(n) && \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{1}{2^{p+1}}f(n) \end{aligned}$$

- On a donc prouvé par récurrence que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, f\left(\frac{n}{2^p}\right) = \frac{1}{2^p} f(n).$$

- Soient  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $p \in \mathbb{N}$ , comme d'après 3.(c),  $f(n) = an$ , on a :

$$f\left(\frac{n}{2^p}\right) = \frac{1}{2^p} f(n) = \frac{1}{2^p} an = a \frac{n}{2^p}.$$

- On a ainsi, par définition de  $D$  :

$$\forall x \in D, f(x) = ax.$$

- (f) i. Soit  $n \in \mathbb{N}$ , comme  $\lfloor 2^n x_0 \rfloor \in \mathbb{Z}$  et  $n \in \mathbb{N}$ , alors :

$$u_n = \frac{\lfloor 2^n x_0 \rfloor}{n} \in D$$

Ainsi,  $(u_n)$  est à valeurs dans  $D$ .

- ii. Soit  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$\lfloor 2^n x_0 \rfloor \leq 2^n x_0 < \lfloor 2^n x_0 \rfloor + 1$$

Donc :

$$\frac{\lfloor 2^n x_0 \rfloor}{2^n} \leq x_0 < \frac{\lfloor 2^n x_0 \rfloor}{2^n} + \frac{1}{2^n}$$

Ainsi :

$$u_n \leq x_0 < u_n + \frac{1}{2^n}.$$

D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_0 - \frac{1}{2^n} < u_n \leq x_0.$$

De plus :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_0 - \frac{1}{2^n} = x_0,$$

donc, par théorème d'encadrement,  $(u_n)$  converge et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = x_0.$$

- iii. Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = x_0$  et  $f$  est continue en  $x_0$ , on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(x_0).$$

De plus,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \in D$ , donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(u_n) = au_n$$

Ainsi :

$$f(x_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} au_n$$

Donc :

$$f(x_0) = ax_0.$$

- (g) • Soit  $f \in E$ , soit  $g$  définie comme à la question 2, alors  $g \in E$  et  $g(0) = 0$ , donc d'après les question précédente, il existe  $a \in \mathbb{R}$  tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = ax$$

De plus, comme :  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x) + f(0)$ , il existe  $b \in \mathbb{R}$  tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax + b.$$

- Réciproquement, posons :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax + b,$$

avec  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Alors  $f$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$  et de plus, soient  $x, y \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} f(x) + f(y) &= ax + b + ay + b \\ &= a(x + y) + 2b \\ &= 2\left(a\frac{x+y}{2} + b\right) \\ &= 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) \end{aligned}$$

Ainsi  $f$  vérifie (1).

Donc  $f \in E$ .

- On a donc :

$$E = \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax + b \end{array} , a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

### Seconde méthode :

4. Soit  $x \in [0, 1]$ ,

- Si  $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ , alors  $0 \leq 2x \leq 1$  donc  $2x \in [0, 1]$ .
- Si  $\frac{1}{2} < x \leq 1$ , alors  $1 < 2x \leq 2$  donc  $2x - 1 \in [0, 1]$ .
- On a donc :

$$\forall x \in [0, 1], 2x \in [0, 1] \text{ ou } 2x - 1 \in [0, 1].$$

5. (a)  $f$  est continue sur le segment  $[0, 1]$  donc  $f$  est bornée et atteint ses bornes.  
Ainsi il existe  $c, d \in [0, 1]$  tels que :

$$f(c) = \max_{[0,1]} f \text{ et } f(d) = \min_{[0,1]} f.$$

On a alors :

$$\forall x \in [0, 1], f(d) \leq f(x) \leq f(c).$$

(b) • On applique (1) à  $x = 2c \in [0, 1]$  et  $y = 0$ . On a alors :

$$f(2c) + f(0) = 2f(c)$$

Or  $f(2c) \leq f(c)$  donc :

$$2f(c) \leq f(0) + f(c)$$

D'où :

$$f(c) \leq f(0).$$

De plus, d'après 5.(a),  $f(0) \leq f(c)$ , donc :

$$f(0) = f(c).$$

- On applique (1) à  $x = 2d \in [0, 1]$  et  $y = 0$ . On a alors :

$$f(2d) + f(0) = 2f(d)$$

Or  $f(2d) \geq f(d)$  donc :

$$2f(d) \geq f(0) + f(d)$$

D'où :

$$f(d) \geq f(0).$$

De plus, d'après 5.(a),  $f(0) \geq f(d)$ , donc :

$$f(0) = f(d).$$

- On a donc :

$$f(c) = f(d) = f(0).$$

- Comme :

$$\forall x \in [0, 1], f(d) \leq f(x) \leq f(c),$$

on a :  $f$  est constante.

(c) • Si  $c \in [\frac{1}{2}, 1]$ , on applique (1) à  $x = 2c - 1 \in [0, 1]$  et  $y = 1$ . On a alors :

$$f(2c - 1) + f(1) = 2f(c)$$

Or  $f(2c - 1) \leq f(c)$  donc :

$$2f(c) \leq f(1) + f(c)$$

D'où :

$$f(c) \leq f(1).$$

De plus, d'après 5.(a),  $f(1) \leq f(c)$ , donc :

$$f(1) = f(c).$$

- Si  $d \in [\frac{1}{2}, 1]$ , on applique (1) à  $x = 2d - 1 \in [0, 1]$  et  $y = 1$ . On a alors :

$$f(2d - 1) + f(1) = 2f(d)$$

Or  $f(2d - 1) \geq f(d)$  donc :

$$2f(d) \geq f(1) + f(d)$$

D'où :

$$f(d) \geq f(1).$$

De plus, d'après 5.(a),  $f(1) \geq f(d)$ , donc :

$$f(1) = f(d).$$

- Comme on a,  $f(0) = f(1)$ , on a donc, dans tous les cas :

$$f(c) = f(d).$$

- Comme :

$$\forall x \in [0, 1], f(d) \leq f(x) \leq f(c),$$

on a :  $f$  est constante.

6. • Soient  $x, y \in [0, 1]$ ,

$$\begin{aligned} h(x) + h(y) &= f(x) - (f(1) - f(0))x + f(y) - (f(1) - f(0))y \\ &= f(x) + f(y) - (f(1) - f(0))(x + y) \\ &= 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) - (f(1) - f(0))(x + y) \\ &= 2\left(f\left(\frac{x+y}{2}\right) - (f(1) - f(0))\frac{x+y}{2}\right) \\ &= 2h\left(\frac{x+y}{2}\right) \end{aligned}$$

Donc  $h$  vérifie (1).

- Comme  $f$  est continue sur  $[0, 1]$ ,  $h$  l'est également, on a alors :

$$h \in E'$$

- On a :

$$h(0) = f(0)$$

et

$$h(1) = f(1) - (f(1) - f(0)) = f(0) = h(0)$$

Donc  $h$  vérifie les hypothèses de la question 5, donc  $h$  est constante.

7. • Soit  $f \in E'$ , alors, d'après la question précédente, il existe  $b \in \mathbb{R}$  tel que :

$$\forall x \in [0, 1], f(x) - (f(1) - f(0))x = b$$

Ainsi, il existe  $a \in \mathbb{R}$ , tel que :

$$\forall x \in [0, 1], f(x) = ax + b$$

- De même que pour la question 3, s'il existe  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que :

$$\forall x \in [0, 1], f(x) = ax + b$$

alors  $f \in E'$ .

- On a donc :

$$E' = \left\{ \begin{array}{ll} [0, 1] & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto ax + b \end{array} , a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

