

6

Correction de la séance

Polynômes de Tchebychev



Exercice de calcul (Chapitre 8, exemple 18)

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2$.
Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$,

$$\frac{x+1}{4x^2-4x+1} = \frac{1}{8} \frac{8x-4}{4x^2-4x+1} + \frac{3}{2} \frac{1}{4x^2-4x+1} = \frac{1}{8} \frac{8x-4}{4x^2-4x+1} + \frac{3}{4} \frac{2}{(2x-1)^2}$$

Ainsi une primitive de $x \mapsto \frac{x+1}{4x^2-4x+1}$ est $x \mapsto \frac{1}{8} \ln(4x^2 - 4x + 1) - \frac{3}{4} \frac{1}{2x-1}$ et les primitives de $x \mapsto \frac{x+1}{4x^2-4x+1}$ sont :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} \frac{1}{8} \ln(4x^2 - 4x + 1) - \frac{3}{4} \frac{1}{2x-1} + \lambda_1 & \text{si } x \in]-\infty, \frac{1}{2}[\\ \frac{1}{8} \ln(4x^2 - 4x + 1) - \frac{3}{4} \frac{1}{2x-1} + \lambda_2 & \text{si } x \in -\frac{1}{2}, +\infty[\end{cases} \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Inégalité

Soit $n \in \mathbb{N}$. f_n est dérivable sur $[0, 1]$ et : $\forall x \in [0, 1], f'_n(x) = \frac{n(1+n^2x^4) - nx \cdot 4n^2x^3}{(1+n^2x^4)^2} = \frac{n-3n^3x^4}{(1+n^2x^4)^2} = \frac{n(1-3n^2x^4)}{(1+n^2x^4)^2}$.

Donc f_n est croissante sur $\left[0, \sqrt[4]{\frac{1}{3n^2}}\right]$ et décroissante sur $\left[\sqrt[4]{\frac{1}{3n^2}}, +\infty\right[$.

Ainsi, soit $x \in [0, 1]$,

$$|f_n(x)| \leq f_n\left(\sqrt[4]{\frac{1}{3n^2}}\right).$$

Or : $f_n\left(\sqrt[4]{\frac{1}{3n^2}}\right) = \frac{n \sqrt[4]{\frac{1}{3n^2}}}{1 + \frac{n^2}{3n^2}} = \frac{3}{4\sqrt[4]{3}} \sqrt{n}$. Donc $c = \frac{3}{4\sqrt[4]{3}}$ convient.



Exercice 14 (Chapitre 15, exercice 12)

Pour tout $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$, on note $\text{dom}(P)$ son coefficient dominant.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $\deg(T_n) = n$ et $\text{dom}(T_n) = 2^{n-1}$. »

Montrons par récurrence d'ordre 2 que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

- Pour $n = 1$, $T_1 = X$ donc $\deg(T_1) = 1$ et $\text{dom}(T_1) = 1 = 2^0$.
Pour $n = 2$, $T_2 = 2X^2 - 1$ donc $\deg(T_2) = 2$ et $\text{dom}(T_2) = 2 = 2^{2-1}$. Ainsi $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$ sont vraies.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies.
On a $T_{n+2} = 2X T_{n+1} - T_n$ donc $\deg(T_{n+2}) = \deg(2X T_{n+1} - T_n)$.
Or, $\deg(T_n) = n$, $\deg(2X T_{n+1}) = \deg(2X) + \deg(T_{n+1}) = \deg(X) + \deg(T_{n+1}) = n+2$
donc $\deg(T_n) < \deg(2X T_{n+1})$.
Ainsi, $\deg(T_{n+2}) = \max(\deg(2X T_{n+1}), \deg(T_n)) = \deg(2X T_{n+1}) = n+2$.
De plus, comme $\deg(T_n) < \deg(2X T_{n+1})$, le coefficient dominant de T_{n+2} est celui du polynôme $2X T_{n+1}$.
D'où $\text{dom}(T_{n+2}) = \text{dom}(2X T_{n+1}) = 2\text{dom}(T_{n+1}) = 2 \times 2^n = 2^{n+1}$.
Ainsi, $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.
- Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\deg(T_n) = n$ et $\text{dom}(T_n) = 2^{n-1}$.

De plus, on a : $\deg(T_0) = 0$ et $\text{dom}(T_0) = 1$.

2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $\mathcal{Q}(n)$: « $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$. »

Montrons par récurrence d'ordre 2 que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{Q}(n)$ est vraie.

- Pour $n = 0$, $T_0(\cos(\theta)) = 1 = \cos(0\theta)$.
Pour $n = 1$, $T_1(\cos(\theta)) = \cos(\theta)$.
Ainsi, $\mathcal{Q}(0)$ et $\mathcal{Q}(1)$ sont vraies.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\mathcal{Q}(n)$ et $\mathcal{Q}(n+1)$ sont vraies.

$$\begin{aligned}
 T_{n+2}(\cos(\theta)) &= 2\cos(\theta)T_{n+1}(\cos(\theta)) - T_n(\cos(\theta)) \\
 &\stackrel{HR}{=} 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta) \\
 &= 2\cos(\theta)(\cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)\sin(\theta)) - \cos(n\theta) \\
 &= \cos(n\theta)(2\cos(\theta)^2 - 1) - \sin(n\theta)(2\cos(\theta)\sin(\theta)) \\
 &= \cos(n\theta)\cos(2\theta) - \sin(n\theta)\sin(2\theta) \\
 &= \cos((n+2)\theta)
 \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{Q}(n+2)$ est vraie.

- On a donc prouvé par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{Q}(n)$ est vraie.

Montrons désormais l'unicité.

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que : $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $P(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.

On a alors : $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $P(\cos(\theta)) = T_n(\cos(\theta))$.

Donc : $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $(P - T_n)(\cos(\theta)) = 0$. Or, $\cos : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ est surjective.

Ainsi : $\forall x \in [-1, 1]$, $(P - T_n)(x) = 0$.

Donc $P - T_n$ admet une infinité de racines (distinctes). C'est donc le polynôme nul.

On a donc $P = T_n$. Ainsi, T_n est bien l'unique polynôme vérifiant l'égalité souhaitée.

3. T_0 n'admet aucune racine.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminons les racines de T_n .

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
 T_n(\cos(\theta)) = 0 &\iff \cos(n\theta) = 0 \\
 &\iff n\theta \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \\
 &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, n\theta = \frac{\pi}{n} + k\pi \\
 &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{\frac{\pi}{n} + k\pi}{n} \\
 &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{(2k+1)\pi}{2n}
 \end{aligned}$$

Ainsi, les $\left(\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right)$ avec $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ sont des racines de T_n .

Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on a $1 \leq 2k+1 \leq 2n-1$. D'où : $0 \leq \frac{\pi}{2n} \leq \frac{(2k+1)\pi}{2n} \leq \pi - \frac{\pi}{2n} < \pi$.

De plus, la fonction $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ est injective. Ainsi, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, les $\left(\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right)$ sont deux à deux distincts. On a ainsi obtenu n racines distinctes pour T_n de degré n . On a donc déterminé toutes les racines de T_n .



Problème 4 (DM9, d'après Centrale PC 2022)

1. Polynômes de Lagrange

(a) Soient $i, k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

- Si $k = i$, $L_i(a_k) = \prod_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}} \frac{a_i - a_j}{a_i - a_j} = 1$.
- Si $k \neq i$, il existe $j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}$ tel que $a_k - a_j = 0$ donc $L_i(a_k) = 0$.

Ainsi :

$$L_i(a_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(b) Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, posons $Q = P - \sum_{i=1}^n P(a_i) L_i$.

- On a $\deg(P) \leq n-1$ et $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\deg(L_i) = n-1$.
Donc $\deg(Q) \leq n-1$.
- Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\begin{aligned} Q(a_k) &= P(a_k) - \sum_{i=1}^n P(a_i) L_i(a_k) \\ &= P(a_k) - P(a_k) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, Q admet au moins n racines distinctes.

- Donc $Q = 0$, d'où : $P = \sum_{i=1}^n P(a_i) L_i$.

(c) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\deg(P) \leq n-2$.

On a $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, donc : $P = \sum_{i=1}^n P(a_i) L_i$ (*).

Le coefficient en X^{n-1} dans L_i est $\frac{1}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (a_i - a_j)}$ et le coefficient en X^{n-1} dans P est 0 donc en égalisant les coefficients

en X^{n-1} dans (*), on obtient :

$$0 = \sum_{i=1}^n \frac{P(a_i)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (a_i - a_j)}.$$

2. Polynômes de Tchebychev

(a) $(1+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ et $(1-1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k$.

En sommant, on obtient :

$$2^n = \sum_{k=0}^n \left(1 + (-1)^k\right) \binom{n}{k}.$$

Or, $1 + (-1)^k = \begin{cases} 2 & \text{si } k \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$

Donc :

$$2^n = \sum_{\substack{k \in [0, n] \\ k \text{ pair}}} 2 \binom{n}{k}.$$

D'où, en posant $k = 2p$:

$$2^n = 2 \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p}.$$

Donc :

$$2^{n-1} = \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p}.$$

(b) Soit $p \in \left[0, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right]$, $X^{n-2p}(1-X^2)^p$ est un polynôme de degré $n-2p+2p=n$ de coefficient dominant $(-1)^p$.

Donc par combinaison linéaire, $\deg(T_n) \leq n$ et le coefficient en X^n dans T_n est

$$\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^p \binom{n}{2p} (-1)^p = \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p} = 2^{n-1} \neq 0.$$

Ainsi, $\deg(T_n) = n$ et le coefficient dominant de T_n est 2^{n-1} .

(c) • Soit $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \cos(n\theta) &= \operatorname{Re} \left(e^{in\theta} \right) = \operatorname{Re} \left((e^{i\theta})^n \right) \\ &= \operatorname{Re} \left((\cos \theta + i \sin \theta)^n \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (i \sin \theta)^k (\cos \theta)^{n-k} \right) \end{aligned}$$

Or : $i^k \in \mathbb{R}$ si k est pair et $i^k \in i\mathbb{R}$ si k est impair. Donc :

$$\begin{aligned} \cos(n\theta) &= \sum_{\substack{k \in [0, n] \\ k \text{ pair}}} i^k \binom{n}{k} \cos^{n-k}(\theta) \sin^k \theta \\ &= \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} i^{2p} \binom{n}{2p} \cos^{n-2p}(\theta) \sin^{2p} \theta \\ &= \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^p \binom{n}{2p} \cos^{n-2p}(\theta) \sin^{2p}(\theta) \\ &= \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^p \binom{n}{2p} \cos^{n-2p}(\theta) (1 - \cos^2 \theta)^p \\ &= T_n(\cos(\theta)) \end{aligned}$$

T_n vérifie bien la relation.

• Unicité :

Soit $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall \theta \in \mathbb{R}, Q_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$.

Alors : $\forall \theta \in \mathbb{R}, (T_n - Q_n)(\cos(\theta)) = 0$.

Or : $\cos : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ est surjectif. Ainsi : $\forall x \in [-1, 1], (T_n - Q_n)(x) = 0$.

Donc $T_n - Q_n$ admet une infinité de racines distinctes. Donc $T_n - Q_n = 0$.

Ainsi $T_n = Q_n$.

• Ainsi T_n est l'unique polynôme tel que : $\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$.

(d) Soit $k \in [1, n]$,

$$\begin{aligned} T_n(x_k) &= T_n \left(\cos \left(\frac{(2k-1)\pi}{2n} \right) \right) \\ &= \cos \left(\frac{(2k-1)\pi}{2} \right) \\ &= \cos \left(k\pi - \frac{\pi}{2} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, x_k est racine de T_n . De plus, $\frac{(2k-1)\pi}{2n} \in [0, \pi]$ et $\cos : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ est injectif. Donc les x_k sont deux à deux distincts.

Ainsi, $x_1, \dots, x_n$ sont n racines de T_n qui est de degré n . Donc T_n est scindé et son coefficient dominant est 2^{n-1} .

Donc $T_n = 2^{n-1} \prod_{k=1}^n (X - x_k)$.

3. Une première inégalité

(a) • en utilisant la question 2.c, $\sup_{x \in [-1, 1]} |T_n(x)| = \sup_{\theta \in \mathbb{R}} |T_n(\cos \theta)| = \sup_{\theta \in \mathbb{R}} |\cos(n\theta)|$ car $\{\cos \theta, \theta \in \mathbb{R}\} = [-1, 1]$.

Ainsi : $\sup_{x \in [-1, 1]} |T_n(x)| = 1$.

- Posons $W = \frac{1}{2^{n-1}} T_n$ alors $\deg(W) = \deg(T_n) = n$ et W est unitaire.

$$\text{De plus, } \sup_{x \in [-1,1]} |W(x)| = \frac{1}{2^{n-1}} \sup_{x \in [-1,1]} |T_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Donc $W = \frac{1}{2^{n-1}} T_n$ vérifie l'égalité.

- (b) • $\deg(T_n) = n$ et $\deg W = n$, donc $\deg(Q) \leq n$.
- Le coefficient en X^n dans Q est $\frac{1}{2^{n-1}} 2^{n-1} - 1 = 0$
- Donc $\deg(Q) \leq n-1$
- (c) i. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$\begin{aligned} Q(z_k) &= \frac{1}{2^{n-1}} T_n(z_k) - W(z_k) \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} T_n\left(\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) - W(z_k) \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \cos(k\pi) - W(z_k) \quad \text{avec la question 2.c} \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} (-1)^k - W(z_k) \end{aligned}$$

$$\text{Or : } -\frac{1}{2^{n-1}} < W(z_k) < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Donc :

- si k est pair $Q(z_k) = \frac{1}{2^{n-1}} - W(z_k) > 0$.
 - si k est impair $Q(z_k) = -\frac{1}{2^{n-1}} - W(z_k) < 0$.
- ii. Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, la fonction polynomiale associée à Q est continue sur $]z_{k+1}, z_k[$ et 0 est compris entre $Q(z_k)$ et $Q(z_{k+1})$ donc d'après le TVI, il existe $c_k \in]z_{k+1}, z_k[$ tel que : $Q(c_k) = 0$.
- iii. On a $z_n < c_{n-1} < z_{n-1} < \dots < z_1 < c_0 < z_0$ donc $c_0, \dots, c_{n-1}$ sont n racines distinctes de Q .
- Or, $\deg(Q) \leq n-1$, donc $Q = 0$.

$$\text{Ainsi : } W = \frac{1}{2^{n-1}} T_n \text{ ce qui est absurde car } \sup_{x \in [-1,1]} |W(x)| < \frac{1}{2^{n-1}} = \sup_{x \in [-1,1]} \left| \frac{T_n(x)}{2^{n-1}} \right|.$$

$$\text{Ainsi : } \sup_{x \in [-1,1]} |W(x)| \geq \frac{1}{2^{n-1}} \text{ et (1) est prouvée.}$$

- (d) i. • Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, de même qu'à la question 1.c.i $Q(z_k) \geq 0$ si k est pair et $Q(z_k) \leq 0$ si k est impair.
- Soit $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $(z_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est décroissante par décroissance de $\cos$ sur $[0, \pi]$. Donc $z_k - z_j > 0$ si $k < j$ et $z_k - z_j < 0$ si $k > j$.

Donc $\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (z_k - z_j)$ est le produit de k termes négatifs ($j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$) et de $n-k$ termes positifs ($j \in \llbracket k+1, n \rrbracket$).

Ainsi, ce produit a même signe que $(-1)^k \times 1^{n-k} = (-1)^k$.

Donc ce produit est positif si k est pair et négatif si k est impair.

- Par produit $\frac{Q(z_k)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n (z_k - z_j)} \geq 0$.

- ii. En appliquant 1.c à $n+1$, aux points $z_0, \dots, z_n$ et au polynôme Q qui vérifie $\deg(Q) \leq (n+1) - 2 = n-1$, on a :
- $$\sum_{k=0}^n \frac{Q(z_k)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n (z_k - z_j)} = 0.$$

Or, il s'agit d'une somme de nombres positifs, donc :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \frac{Q(z_k)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n (z_k - z_j)} = 0.$$

Donc : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, Q(z_k) = 0$.

Ainsi Q admet au moins $n+1$ racines distinctes $(z_0, \dots, z_n)$ et $\deg(Q) \leq n-1$.

Donc $Q = 0$ et $W = \frac{1}{2^{n-1}} T_n$.

On a donc égalité dans (1) ssi $W = \frac{T_n}{2^{n-1}}$.