Correction de la séance 5

Théorème de Césaro

Exercice de calcul *(Chapitre 12, exemple 9)*

Posons $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On a $A = U - I_3$. Comme U et I_3 commutent, on a, d'après le binôme de Newton :

$$A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} U^k (-I_3)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} U^k.$$

On remarque que $U^2 = 3U$, on a ainsi : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $U^k = 3^{k-1} U$ donc :

$$\begin{aligned} A^n &= (-1)^n I_3 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} U^k \\ &= (-1)^n I_3 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} 3^{k-1} U \\ &= (-1)^n I_3 + \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} 3^{k-1} - \frac{(-1)^n}{3} \right) U \\ &= (-1)^n I_3 + \left(\frac{(-1+3)^n}{3} - \frac{(-1)^n}{3} \right) U \\ &= (-1)^n I_3 + \frac{2^n - (-1)^n}{3} U. \end{aligned}$$

Inégalité

Soit $(x,t) \in (\mathbb{R}^+)^2$, on a : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \dfrac{t^2 \cos(xt)}{(1+t^2)^2}$. Donc :

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| \leq \frac{t^2}{(1+t^2)^2} \leq \frac{1}{1+t^2}.$$

Posons $g : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ alors g convient.

Exercice 13 *(Chapitre 11, exemple 5)*

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\forall n \geq N,\ |u_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Soit $n \geq N$,

$$\begin{aligned}
|v_n - l| = \left|\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k\right) - l\right| &= \left|\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k\right) - \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} l\right)\right| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(u_k - l)\right| \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |u_k - l| \qquad \text{d'après l'inégalité triangulaire} \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N-1} |u_k - l| + \frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n} |u_k - l| \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N-1} |u_k - l| + \frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n} \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N-1} |u_k - l| + \frac{\varepsilon}{2}\frac{n-N+1}{n} \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N-1} |u_k - l| + \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{car } \frac{n-(N-1)}{n} \leq 1
\end{aligned}$$

Or $\sum_{k=1}^{N-1} u_k$ est constant (car N est fixé), donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N-1} u_k = 0$. Ainsi, il existe un rang $N' \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N' \implies \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N-1} |u_k| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit $n \geq \max(N, N')$, on a alors $|v_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$.
Ainsi, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.

Problème 3 *(Révisions Noël)*

1. (a)
   - Pour $n = 2$, $x_2 = \frac{2}{3}$ donc $0 < x_2 < 1$.
   - Soit $n \geq 2$, supposons que $0 < x_n < 1$. Alors :

     $$x_{n+1} = \frac{x_n(1+x_n)}{1+2x_n} > 0.$$

     et :

     $$x_{n+1} - 1 = \frac{x_n(1+x_n) - (1+2x_n)}{1+2x_n} 1 = \frac{x_n^2 - x_n - 1}{1+2x_n}.$$

     Or le discriminant associé à $x^2 - x - 1 = 0$ est $\Delta = 5$ et ses racines sont $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.
     Or : $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 < x_n < 1 < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ donc : $x_n^2 - x_n - 1 > 0$, ainsi $x_{n+1} - 1 > 0$.
     Donc : $0 < x_{n+1} < 1$.
   - On a donc prouvé par récurrence que :

     $$\forall n \geq 2,\ 0 < x_n < 1.$$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

   $$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n(1+x_n) - x_n(1+2x_n)}{1+2x_n} = \frac{-x_n^2}{1+2x_n} \leq 0.$$

   Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

   (c)
   - La suite (x_n) est décroissante et minorée par 0 donc (x_n) converge vers $l \in [0,1]$.
   - Par passage à la limite, on a donc : $l = \frac{l(1+l)}{1+2l}$. Or :

     $$l = \frac{l(1+l)}{1+2l} \Leftrightarrow l = 0 \text{ ou } 1 = \frac{1+l}{1+2l} \Leftrightarrow l = 0 \text{ ou } 1+2l = 1+l \Leftrightarrow l = 0.$$

   Donc (x_n) converge vers 0.

(d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} = \frac{1+2x_n}{x_n(1+x_n)} - \frac{1}{x_n} = \frac{1+2x_n-(1+x_n)}{x_n(1+x_n)} = \frac{1}{x_n+1}.$$

(e) Comme $\lim x_n = 0$, on a : $\lim \frac{1}{x_n+1} = 1$.
Ainsi $\lim u_n = 1$.

(f)
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$,
$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{x_{k+1}} - \frac{1}{x_k}\right).$$
Donc, par sommes télescopiques :
$$v_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_1}\right).$$
- Comme $\lim u_n = 1$, par théorème de Césaro, $\lim v_n = 1$.
Or, soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $v_n = \frac{1}{nx_{n+1}} - \frac{1}{n}$.
Donc : $\frac{1}{nx_{n+1}} = v_n + \frac{1}{n}$, ainsi : $\lim \frac{1}{nx_{n+1}} = 1$ donc $\lim nx_{n+1} = 1$.
Or $\lim x_{n+1} = 0$, d'où $\lim(n+1)x_{n+1} = 1$.
Ainsi :
$$\lim_{n\to+\infty} nx_n = 1.$$

2. (a) Posons $l = \lim x_n$, alors $\lim(x_{n+1} - x_n) = l - l = 0$.
Donc la suite $(x_{n+1} - x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

(b) i. Posons : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = x_{n+1} - x_n$.
Alors, comme $\lim u_n = l$, on a, d'après le théorème de Césaro : $\lim v_n = l$.
Or, soit $n \in \mathbb{N}^*$,
$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_{k+1} - x_k) = \frac{1}{n}(x_{n+1} - x_1),$$
par somme télescopique.
Ainsi : $\lim \frac{1}{n}(x_{n+1} - x_1) = l$.
Or $\lim \frac{x_1}{n} = 0$, d'où $\lim \frac{x_{n+1}}{n} = l$.
De plus, $\lim \frac{n}{n+1} = 1$ donc, par produit : $\lim \frac{x_{n+1}}{n+1} = l$.
Donc :
$$\lim \frac{x_n}{n} = l.$$

ii. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $x_n = \frac{x_n}{n}.n$.
Or $\lim \frac{x_n}{n} = l \neq 0$ et $\lim n = +\infty$ donc :
$$\lim x_n = \begin{cases} +\infty & \text{si } l > 0 \\ -\infty & \text{si } l < 0. \end{cases}$$

iii. Posons : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \ln n$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$,
$$x_{n+1} - x_n = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$
Donc $\lim(x_{n+1} - x_n) = 0$ et (x_n) diverge.
Ainsi, dans le cas où $l = 0$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas nécessairement convergente.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$,
$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k = \frac{1}{n}\,\frac{-1+(-1)^{n+1}}{1-(-1)} = \frac{-1+(-1)^{n+1}}{2n}.$$
Ainsi, comme $(-1+(-1)^{n+1})$ est bornée et $\lim \frac{1}{2n} = 0$, on a :
$$\lim v_n = 0.$$

(b) On a (v_n) qui converge et (u_n) qui n'a pas de limite. Ainsi la réciproque du théorème de Césaro est fausse.

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, comme (u_n) est croissante, on a :
$$\sum_{k=n+1}^{2n} u_k \geq \sum_{k=n+1}^{2n} u_{n+1} = (2n-(n+1)+1)u_{n+1} = nu_{n+1}.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,
$$u_{n+1} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n} u_k = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{2n} u_k - \sum_{k=1}^{n} u_k\right) = \frac{1}{n}(2nv_{2n} - nv_n) = 2v_{2n} - v_n.$$

(c)
- (v_n) est convergente donc bornée, ainsi $(2v_{2n} - v_n)$ est bornée. Donc (u_n) est majorée.
- (u_n) est croissante et majorée donc (u_n) converge.
- Posons $l = \lim u_n$, alors, d'après le théorème de Césaro, $\lim v_n = l$ donc :

$$\lim u_n = \lim v_n.$$

(d) On a montré que si (u_n) est croissante, alors la réciproque du théorème de Césaro est vraie.