Correction de la séance 4

Dénombrement et probabilités

Exercice de calcul *(Chapitre 16, exemple 7)*

Calculer le développement limité des fonctions suivantes :

1.

$$\operatorname{Arctan}(x^3) \underset{0}{=} x^3 + o(x^8)$$

2.

$$\begin{aligned}
(\cos x)^x &\underset{0}{=} e^{x\ln(\cos x)} \\
&\underset{0}{=} e^{x\ln(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3))} \\
&\underset{0}{=} e^{x\left(-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)} \\
&\underset{0}{=} e^{-\frac{x^3}{2}+o(x^4)} \\
&\underset{0}{=} 1-\frac{x^3}{2}+o(x^4)
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+\sqrt{1+4\sin x}} &\underset{0}{=} \sqrt{1+\sqrt{1+4(x+o(x^2))}} \\
&\underset{0}{=} \sqrt{1+1+2x-\frac{(4x)^2}{8}+o(x^2)} \\
&\underset{0}{=} \sqrt{2+2x-2x^2+o(x^2)} \\
&\underset{0}{=} \sqrt{2}\sqrt{1+x-x^2+o(x^2)} \\
&\underset{0}{=} \sqrt{2}\left(1+\frac{x-x^2}{2}-\frac{(x-x^2)^2}{8}+o(x^2)\right) \\
&\underset{0}{=} \sqrt{2}\left(1+\frac{x-x^2}{2}-\frac{x^2}{8}+o(x^2)\right) \\
&\underset{0}{=} \sqrt{2}\left(1+\frac{x}{2}-\frac{5x^2}{8}+o(x^2)\right)
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
\cos(\sin x) &\underset{0}{=} \cos\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^6)\right)\\
&\underset{0}{=} 1-\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}\right)^2+\frac{1}{24}\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}\right)^4-\frac{1}{720}\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}\right)^6+o(x^6)\\
&\underset{0}{=} 1-\frac{1}{2}\left(x^2+2x\left(-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}\right)+\left(-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}\right)^2\right)+\frac{1}{24}\left(x^4+4x^3\left(-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}\right)\right)-\frac{1}{720}\left(x^6\right)+o(x^6)\\
&\underset{0}{=} 1-\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{x^4}{3}+\frac{x^6}{60}+\frac{x^6}{36}\right)+\frac{1}{24}\left(x^4-\frac{2x^6}{3}\right)-\frac{x^6}{720}+o(x^6)\\
&\underset{0}{=} 1-\frac{1}{2}x^2+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{24}\right)x^4+\left(-\frac{1}{120}-\frac{1}{72}-\frac{1}{36}-\frac{1}{720}\right)x^6+o(x^6)\\
&\underset{0}{=} 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4-\frac{37}{720}x^6+o(x^6)
\end{aligned}$$

Inégalité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. f_n est dérivable sur $[1,+\infty[$ et : $\forall x \in [1,+\infty[$, $f_n'(x) = \dfrac{2x(1+n^2x^2)-x^2.2n^2x}{(1+n^2x^2)^2} = \dfrac{2x}{(1+n^2x^2)^2} > 0$.
Donc f_n est strictement croissante sur $[1,+\infty[$.
Ainsi, soit $x \in [1,+\infty[$,

$$\left|f_n(x)\right| = f_n(x) \leq \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \frac{1}{n^2}.$$

Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n^2}$, alors (u_n) convient.

Exercice 10 *(Chapitre 21, exemple 7)*

1. Mettre au plus un prospectus par boîte quand les prospectus sont identiques, revient à choisir les 7 boîtes aux lettres dans lesquelles on met un prospectus, c'est-à-dire choisir un ensemble à 7 éléments dans un ensemble à 10 éléments, il y a donc : $\begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix}$ possibilités.
2. Mettre au plus un prospectus par boîte quand les prospectus sont tous différents, revient à choisir pour chacun des 7 prospectus une boîte aux lettres distincte des autres , c'est-à-dire choisir un 7-uplet d'éléments deux à deux distincts d'un ensemble à 10 éléments, il y a donc : $10!/3!$ possibilités.
3. Mettre un nombre quelconque de prospectus par boîte quand les prospectus sont tous différents, revient à choisir pour chacun des 7 prospectus une boîte aux lettres, c'est-à-dire choisir un 7-uplet d'un ensemble à 10 éléments, il y a donc : 10^7 possibilités.
4. Mettre un nombre quelconque de prospectus par boîte quand les prospectus sont identiques, revient à choisir un mot constitué de 9 lettres I (cloisons entre les boîtes aux lettres) et 7 lettres O (prospectus), c'est-à-dire choisir la position des 9 lettres I parmi les 16 positions possibles, il y a donc : $\begin{pmatrix} 16 \\ 7 \end{pmatrix}$ possibilités.

Exercice 11 *(Chapitre 22, exemple 9)*

Pour $k \in [\![0,2]\!]$, on note A_k : « on transfère k boules blanches de l'urne B dans l'urne A »

1. On a :
$$P(A_0)=\frac{\binom{8}{2}}{\binom{12}{2}}=\frac{14}{33},\ P(A_1)=\frac{\binom{8}{1}\binom{4}{1}}{\binom{12}{2}}=\frac{16}{33},\ P(A_2)=\frac{\binom{4}{2}}{\binom{12}{2}}=\frac{1}{11}.$$
De plus, on note B l'événement « on pioche une boule blanche de l'urne A »on a :
$$P(B|A_0)=\frac{6}{13},\ P(B|A_1)=\frac{7}{13},\ P(B|A_2)=\frac{8}{13}.$$
Or, (A_0, A_1, A_2) forme un système complet d'événements.

Ainsi, par la formule des probabilités totales, on a :
$$P(B)=P(B|A_0)P(A_0)+P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)=\frac{220}{429}.$$
2. On cherche $P(A_1\cup A_2|B)$.
On pose C : « l'une au moins des boules transférées est blanche ».
On a : $C=A_1\cup A_2$. Ainsi :
$$P(C|B)=P(A_1\cup A_2|B)=P_B(A_1\cup A_2)=P_B(A_1)+P_B(A_2)$$
car A_1 et A_2 sont incompatibles et P_B est une probabilité.
$$\begin{aligned}P(C|B)&=\frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B)}+\frac{P(B|A_2)P(A_2)}{P(B)}\\&=\frac{\frac{16}{33}\times\frac{7}{13}}{\frac{220}{429}}+\frac{\frac{1}{11}\times\frac{8}{13}}{\frac{220}{429}}\\&=\frac{28}{55}+\frac{6}{55}\\&=\frac{34}{55}\end{aligned}$$
.

Exercice 12 *(Chapitre 22, exemple 13)*

Méthode 1 :
Notons Z la variable aléatoire égale au nombre de candidats ayant réussi à l'issue des 2 épreuves.
Notons U la variable aléatoire égale au nombre de candidats ayant réussi à l'issue de la première épreuve.
La variable aléatoire U représente le nombre de succès (réussir à la première épreuve) lors de la répétition de n expériences de Bernoulli indépendantes, chacune ayant la probabilité p de réussir. Ainsi, U suit une loi binomiale de paramètres n, p.
Notons V la variable aléatoire égale au nombre de candidats ayant réussi à la 2ème épreuve (et donc raté la première). Soit $k\in[\![0,n]\!]$. Supposons $(U=k)$ réalisé. On a alors $n-k$ candidats qui passent la deuxième épreuve et chaque candidat à la probabilité p de réussir.
Ainsi, pour tout $i\in[\![0,n-k]\!]$, on a :
$$P(V=i|U=k)=\binom{n-k}{i}p^i(1-p)^{n-k-i}.$$
On a $Z=U+V$ et $Z(\Omega)=[\![0,n]\!]$.
De plus, $(U=k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est un système complet d'événements.

D'après la formule de probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned}
P(Z=j) &= \sum_{k=0}^{n} P((U+V=j)\cap(U=k)) \\
&= \sum_{k=0}^{n} P((V=j-k)\cap(U=k)) \\
&= \sum_{k=0}^{j} P((V=j-k)\cap(U=k)) \text{ car } (V=j-k)=\emptyset \text{ si } j-k<0 \\
&= \sum_{k=0}^{j} P(V=j-k|U=k)P(U=k) \\
&= \sum_{k=0}^{j} \binom{n-k}{j-k} p^{j-k}(1-p)^{n-k-(j-k)}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{j} \binom{n-k}{j-k}\binom{n}{k} p^j(1-p)^{2n-j-k}
\end{aligned}$$

Or,

$$\binom{n-k}{j-k}\binom{n}{k} = \frac{(n-k)!}{(n-j)!(j-k)!}\times\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{j!}{k!(j-k)!}\times\frac{n!}{j!(n-j)!} = \binom{j}{k}\binom{n}{j}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
P(Z=j) &= \binom{n}{j}p^j(1-p)^{2n-2j}\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}(1-p)^{j-k} \\
&= \binom{n}{j}p^j(1-p)^{2n-2j}(1+1-p)^j \\
&= \binom{n}{j}p^j(1-p)^{2n-2j}(2-p)^j \\
&= \binom{n}{j}((1-p)^2)^{n-j}(p(2-p))^j \\
&= \binom{n}{j}(1-p(2-p))^{n-j}(p(2-p))^j
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$Z \sim \mathcal{B}(n, p(2-p)).$$

Méthode 2 :
Notons R_1 réussir à l'issue de la 1ère tentative et R_2 réussir à l'issue de la 2ème tentative (et donc rater la 1ère).
$(R_1, \overline{R_1})$ est un système complet d'événements.
Ainsi, d'après le formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned}
P(R_1\cup R_2) &= P(R_1\cup R_2|R_1)P(R_1)+P(R_1\cup R_2|\overline{R_1})P(\overline{R_1}) \\
&= 1\times P(R_1)+P(R_2)P(\overline{R_1}) \\
&= p+p(1-p) \\
&= p(2-p)
\end{aligned}$$

Ainsi, Z représente le nombre de succès (réussir à l'issue d'une des deux tentatives) lors la répétition de n expériences de Bernoulli indépendantes chacune ayant la probabilités $P(R_1\cup R_2)=p(2-p)$ de réussir.
Ainsi, Z suit une loi binomiale de paramètre $n, p(2-p)$.