Correction de la séance 3

Suites récurrentes

Exercice de calcul *(Chapitre 6, exemple 18)*

- **Méthode 1 :**
  Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose : $f : x \mapsto (1+x)^n$.
  On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$, d'après la formule du binôme de Newton.
  De plus, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
  Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k x^{k-1}$.
  En évaluant cette égalité en 1, on obtient : $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k = n2^{n-1}$.
- **Méthode 2 :**
  Soit $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\begin{aligned} k\binom{n}{k} &= k\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k(k-1)!} = \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!} \\ &= \frac{n!}{(n-1-(k-1))!(k-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1-(k-1))!(k-1)!} = n\binom{n-1}{k-1} \end{aligned}$$

  On a alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} \\ &= n\sum_{l=0}^{n-1}\binom{n-1}{l} \quad \text{par changement d'indice } l = k-1 \\ &= n2^{n-1} \quad \text{par le binôme de Newton.} \end{aligned}$$

Inégalité

Soit $(x,t) \in [a,b] \times \mathbb{R}^+$, on a : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{-t^2 e^{-t^2 x}}{1+t^2}$. Donc :

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \frac{t^2 e^{-t^2 x}}{1+t^2} \leq e^{-t^2 x} \leq e^{-t^2 a}.$$

Posons $h : t \mapsto e^{-t^2 a}$ alors h est continue sur $\mathbb{R}^+$ et, par croissances comparées, $h(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc h convient.

Exercice 8 *(Chapitre 11, exercice 22)*

Posons $\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2+\dfrac{3}{16} \end{array}$.

Déterminons les points fixes de f :

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x)=x &\iff x^2+\frac{3}{16}=x \\ &\iff 16x^2-16x+3=0 \end{aligned}$$

Le discriminant de $16x^2-16x+3$ vaut $16^2-4\times 3\times 16=16(16-12)=16\times 4=8^2$.

Ainsi, on a :

$$f(x)=x \iff x=\frac{1}{4} \text{ ou } x=\frac{3}{4}$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x)=2x$.

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{4}$		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$		$+$		$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{2}{3}$	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

De plus, soit $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x)-x=x^2-x+\frac{3}{16}=\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right).$$

Donc $f(x)-x \leq 0 \leftrightarrow x \in \left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]$.

- Si $u_0 \in \left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right[$, comme $\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right[$ est stable. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in \left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right[$.
  De plus, f est croissante sur $\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]$, ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

  $u_1-u_0=f(u_0)-u_0 \leq 0$. Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. De plus, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par $\dfrac{1}{4}$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$ par théorème de la limite monotone.

  De plus, f est continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $f(l)=l$ donc $l=\dfrac{1}{4}$ ou $l=\dfrac{3}{4}$. De plus, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Ainsi, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_0$ donc par passage à la limite, on a : $l \leq u_0$. D'où $l<\dfrac{3}{4}$. Ainsi, $l=\dfrac{1}{4}$.
- Si $u_0 \in \left[0,\frac{1}{4}\right[$, comme $\left[0,\frac{1}{4}\right[$ est stable. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in \left[0,\frac{1}{4}\right[$.
  De plus, f est croissante sur $\left[0,\frac{1}{4}\right[$, ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

  $u_1-u_0=f(u_0)-u_0 \geq 0$. Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. De plus, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par $\dfrac{1}{4}$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$ par théorème de la limite monotone.

  De plus, f est continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $f(l)=l$ donc $l=\dfrac{1}{4}$ ou $l=\dfrac{3}{4}$. De plus, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par $\dfrac{1}{4}$. Ainsi, par passage à la limite, on a : $l \leq \frac{1}{4}$. Ainsi, $l=\dfrac{1}{4}$.
- Si $u_0 \in \left]\frac{3}{4},+\infty\right[$ comme $\left]\frac{3}{4},+\infty\right[$ est stable. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in \left]\frac{3}{4},+\infty\right[$.
  De plus, f est croissante sur $\left[\frac{3}{4},+\infty\right[$, ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
  $u_1-u_0=f(u_0)-u_0 \geq 0$. Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Si, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$ par théorème de la limite monotone.
  De plus, f est continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $f(l)=l$ donc $l=\dfrac{1}{4}$ ou $l=\dfrac{3}{4}$. De plus, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par u_0. Ainsi, par passage à

la limite, on a : $l \leq u_0$. Ainsi, $l > \dfrac{3}{4}$, ce qui est absurde. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée. Et, comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, on a : $\lim u_n = +\infty$.

- Si $u_0 < 0$, alors $u_1 > 0$ donc on peut appliquer les résultat précédent à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. De plus, on a : $u_1 \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right] \iff u_0 \in \left[-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right]$, $u_1 \in \left[0, \frac{1}{4}\right[\iff u_0 \in \left]-\frac{1}{4}, 0\right]$ et $u_1 \in \left[\frac{3}{4}, +\infty\right[\iff u_0 \in \left]-\infty, -\frac{3}{4}\right[$.
- En conclusion : la suite (u_n) converge vers $\frac{1}{4}$ si $u_0 \in \left]-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right[$, la suite (u_n) converge vers $\frac{3}{4}$ si $u_0 = \pm\frac{3}{4}$ et sinon, la suite (u_n) diverge vers $+\infty$

Exercice 9 *(Chapitre 14, exercice 17)*

Posons $f : x \mapsto 2 + \dfrac{1}{2}\sin x$.

$u_0 \in \mathbb{R}$ donc $u_1 \in \left[\dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{2}\right]$ car sin à valeurs dans $[-1, 1]$. De plus, $\left[\dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{2}\right]$ est stable par f car sin à valeurs dans $[-1, 1]$. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est à valeurs dans $\left[\dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{2}\right]$.

Posons $g : x \mapsto f(x) - x$.

$g\left(\dfrac{3}{2}\right) = f\left(\dfrac{3}{2}\right) - \dfrac{3}{2} \geq 0$ et $g\left(\dfrac{5}{2}\right) = f\left(\dfrac{5}{2}\right) - \dfrac{5}{2} \leq 0$.

De plus, g est continue sur $\left[\dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{2}\right]$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in \left[\dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{2}\right]$ tel que $g(c) = 0$. Donc $f(c) = c$. Ainsi, f admet au moins un point fixe dans $\left[\dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{2}\right]$.

Enfin, f est dérivable sur $\left[\dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{2}\right]$ et on a :

$$\forall x \in \left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right], \ |f'(x)| = |\frac{1}{2}\cos(x) \leq \frac{1}{2}.$$

Ainsi, d'après l'inégalité des accroissements finis, soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$|f(u_n) - f(c)| \leq \frac{1}{2}|u_n - c|.$$

Ainsi :

$$|u_{n+1} - c| \leq \frac{1}{2}|u_n - c|.$$

Donc :

$$|u_n - c| \leq \frac{1}{2^{n-1}}|u_1 - c|.$$

Comme $\lim \dfrac{1}{2^{n-1}} = 0$, alors, la suite (u_n) converge vers c.

Problème 2 *(Problème supplémentaire 12)*

1. (a) u est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$ donc u est bijective de $[0, +\infty[$ vers $[u(0), \lim_{+\infty} u[= [-6, +\infty[$.

   (b) u est bijective de $[0, +\infty[$ vers $[-6, +\infty[$ et $0 \in [-6, +\infty[$ donc il existe un unique $\alpha \in [0, +\infty[$ tel que :

   $$u(\alpha) = 0.$$

   (c) On a : $u(1) = 3$ et $u(2) = 6$, donc $u(1) \leq u(\alpha) \leq u(2)$.
   Or u est strictement croissante donc :

   $$1 \leq \alpha \leq 2.$$

2. (a) Montrons que :

   $$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha.$$

- Pour $n = 0$, $u_0 = \alpha$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n = \alpha$.
  Alors :
$$u_{n+1} = \frac{6}{2+\alpha_2}.$$
  Or $\alpha^3 + 2\alpha - 6 = 0$, donc $\alpha(2+\alpha^2) = 6$ et ainsi : $\dfrac{6}{2+\alpha^2} = \alpha$. Donc :
$$u_{n+1} = \alpha.$$
- Ainsi, par récurrence :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \alpha.$$

(b)
- f est dérivable et :
$$\forall x \in]0,+\infty[,\ f'(x) = -\frac{12x}{(1+x^2)^2} < 0.$$
  Donc f est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$.
- On a : $f(1) = 2$, $f(2) = 1$ et $f(\alpha) = \alpha$.

x	0	1	α	2	$+\infty$
f		2	α	1	

(c) i.
- Pour $n = 0$, $u_{2n} = u_0 \in [1,\alpha[$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_{2n} =\in [1,\alpha[$.
  Alors :
$$u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f \circ f(u_{2n}).$$
  Or $u_{2n} =\in [1,\alpha[$ donc $f(u_{2n}) =\in]\alpha,2]$, ainsi :
$$u_{2(n+1)} in[1,\alpha[.$$
- Ainsi, par récurrence :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n} =\in [1,\alpha[.$$

ii. Soit $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned} u_{2(n+1)} - u_{2n} &= f \circ f(u_{2n}) - u_{2n} \\ &= -\frac{(u_{2n}-1)(u_{2n}-2)(u_{2n}^3 + 2u_{2n} - 6)}{(2+u_{2n}^2)^2 + 18} \end{aligned}$$
Or :
- $u_{2n} - 1 \geq 0$,
- $u_{2n} - 2 < 0$,
- $u_{2n} - 2)(u_{2n}^3 + 2u_{2n} - 6 = u(u_{2n}) < 0$ car $u_{2n} < \alpha$ et u strictement croissante,
- $(2+u_{2n}^2)^2 + 18 > 0$.

Donc :
$$u_{2(n+1)} - u_{2n} \leq 0.$$
Ainsi $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

iii.
- $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 1 donc, $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in [1,u_0] \subset [1,\alpha[$.
- On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{2(n+1)} = f \circ f(u_{2n})$ et f est continue donc :
$$f \circ f(l) = l.$$
  Ainsi :
$$\frac{(l-1)(l-2)(l^3+2l-6)}{(2+l^2)^2+18} = 0.$$
  Donc $l \in \{1, 2\alpha\}$. Or $l \in [1,\alpha[$, donc $l = 1$.
- Donc $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.

(d)
- Soit $n \in \mathbb{N}$,
$$u_{2n+1} = f(u_{2n}) \in]\alpha, 2],$$
car $u_{2n} =\in [1, \alpha[$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{2(n+1)} \leq u_{2n}$ et f décroissante donc : $f(u_{2(n+1)}) \geq f(u_{2n})$ ainsi :
$$u_{2n+3} \geq u_{2n+1}.$$
Donc $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
- On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+1} = f(u_{2n})$ et $\lim u_{2n} = 1$ et f continue en 1, donc :
$$\lim u_{2n+1} = f(1) = 2.$$

(e) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet deux suites extraites convergeant vers des limites différentes donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.