Correction de la séance 2

Polynômes de Lagrange

Exercice de calcul *(Chapitre 9, exemple 8)*

On résout : $y' + \frac{1}{x}y = \frac{\cos(x)}{x} \quad (E)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

- On résout : $y' + \frac{1}{x}y = 0 \quad (E_0)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
  Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ est $x \mapsto \ln x$ donc les solutions de (E_0) sont :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lambda e^{-\ln x} = \frac{\lambda}{x}, \end{array} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- D'après la méthode de variation de la constante, on cherche une solution de (E) de la forme : $y : x \mapsto \frac{\lambda(x)}{x}$ avec λ dérivable.
  On a :

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{\cos(x)}{x} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \frac{\lambda'(x)}{x} = \frac{\cos(x)}{x} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \lambda'(x) = \cos(x).$$

  Donc $\lambda : x \mapsto \sin x$ convient et $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est solution particulière de (E).
- Les solutions de (E) sont donc :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lambda = \frac{\lambda + \sin x}{x}, \end{array} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Inégalité

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^{+*}$.

$$\left|f_n(x)\right| \leq \frac{x}{n.n^2 x} \leq \frac{1}{n^3}$$

et comme $f_n(0) = 0$, cette inégalité reste vraie pour $x \in \mathbb{R}^+$.

Posons : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n^3}$. Alors (u_n) convient.

Exercice 6 *(Chapitre 19, exercice 17)*

1. - Montrons que φ est linéaire :
     Soient $P, Q \in \mathbb{K}_n[X]$, soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. On a :

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda P + \mu Q) &= ((\lambda P + \mu Q)(a_1), \ldots, (\lambda P + \mu Q)(a_{n+1})) \\ &= \lambda(P(a_1), \ldots, P(a_{n+1})) + \mu(Q(a_1), \ldots, Q(a_{n+1})) \\ &= \lambda\varphi(P) + \mu\varphi(Q) \end{aligned}$$

- Montrons que $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$.
  Soit $P \in \operatorname{Ker}\varphi$ alors $P \in \mathbb{K}_n[X]$. De plus, $\varphi(P) = 0$. Donc : $\forall i \in [\![1, n+1]\!]$, $P(a_i) = 0$. Or, les $(a_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ sont deux à deux distincts. Ainsi, P admet au moins $n+1$ racines distinctes. Or, $\deg(P) \leq n$. Donc, $P = 0$.
  Ainsi, $\operatorname{Ker}\varphi \subset \{0\}$.
  Donc, $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$.
  Ainsi, φ est injective.
- De plus, $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n+1 = \dim(\mathbb{K}^{n+1})$ donc φ est bijective.

Ainsi, φ est un isomorphisme.

2. - φ est un isomorphisme donc φ^{-1} est un isomorphisme.
     Or, l'image d'une base par un isomorphisme est encore une base. Ainsi, $(L_1, \ldots, L_{n+1})$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
   - Soit $k \in [\![1, n+1]\!]$, on a $\varphi^{-1}(e_k) = L_k$ donc $\varphi(L_k) = e_k$.
     Ainsi, on a :
     $$L_k(a_k) = 1 \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![1, n+1]\!] \setminus \{k\},\ L_k(a_i) = 0.$$
     On sait que $L_k \in \mathbb{K}_n[X]$ donc L_k est un polynôme de degré au plus n.
     De plus, $L_k(a_k) \neq 0$ donc L_k n'est pas le polynôme nul.
     Par ailleurs, les a_i avec $i \in [\![1, n+1]\!] \setminus \{k\}$ sont racines de L_k et sont deux à deux distincts donc L_k admet au moins n racines distinctes. Comme $\deg L_k \leq n$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $L_k = \lambda \displaystyle\prod_{i\in[\![1,n+1]\!]\setminus\{k\}} (X - a_i)$.
     Enfin, comme $1 = L_k(a_k) = \lambda \displaystyle\prod_{i\in[\![1,n+1]\!]\setminus\{k\}} (a_k - a_i)$.
     On obtient : $\lambda = \dfrac{1}{\displaystyle\prod_{i\in[\![1,n+1]\!]\setminus\{k\}} (a_k - a_i)}$ (le dénominateur est bien non nul car les a_i sont deux à deux distincts.
     Finalement :
     $$L_k = \frac{\displaystyle\prod_{i\in[\![1,n+1]\!]\setminus\{k\}} (X - a_i)}{\displaystyle\prod_{i\in[\![1,n+1]\!]\setminus\{k\}} (a_k - a_i)}$$

3. Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$.
   Comme $(L_1, \ldots, L_{n+1})$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$, il existe un unique $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que $P = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k L_k$.
   Soit $i \in [\![1, n+1]\!]$.
   En évaluant en a_i, on obtient : $P(a_i) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k L_k(a_i) = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k \delta_{k,i} = \lambda_i$.
   Ainsi : $P = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} P(a_k) L_k$.

Problème 1 *(DM8)*

1. (a) Comme $\displaystyle\prod_{j\in[\![1,n]\!]\setminus\{i\}} (a_i - a_j) \in \mathbb{R}^*$, on a :
   $$\deg L_i = \sum_{j\in[\![1,n]\!]\setminus\{i\}} 1 = n - 1.$$
   (b) Soient $i, k \in [\![1, n]\!]$.
   - si $i \neq k$, alors :
     $$L_i(a_k) = \frac{\displaystyle\prod_{j\in[\![1,n]\!]\setminus\{i\}} (a_k - a_j)}{\displaystyle\prod_{j\in[\![1,n]\!]\setminus\{i\}} (a_i - a_j)} = \frac{(a_k - a_k) \displaystyle\prod_{j\in[\![1,n]\!]\setminus\{i,k\}} (a_k - a_j)}{\displaystyle\prod_{j\in[\![1,n]\!]\setminus\{i\}} (a_i - a_j)} = 0.$$
   - si $i = k$, alors :
     $$L_i(a_k) = \frac{\displaystyle\prod_{j\in[\![1,n]\!]\setminus\{i\}} (a_k - a_j)}{\displaystyle\prod_{j\in[\![1,n]\!]\setminus\{i\}} (a_i - a_j)} = \frac{\displaystyle\prod_{j\in[\![1,n]\!]\setminus\{i\}} (a_k - a_j)}{\displaystyle\prod_{j\in[\![1,n]\!]\setminus\{i\}} (a_k - a_j)} = 1.$$

Donc :

$$L_i(a_k) = \delta_{i,k}.$$

(c) - Analyse : Supposons qu'il existe $(\lambda_1,...,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $P = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i$.

  Soit $k \in [\![1,n]\!]$. On a :

$$P(a_k) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i(a_k) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{i,k} = \lambda_k.$$

  Donc :

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ \lambda_k = P(a_k).$$

- Synthèse : posons $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_k = P(a_k)$.

  Soit $Q = P - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i$.

  - Comme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $L_i \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, alors $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
  - Soit $k \in [\![1,n]\!]$, on a :

$$Q(a_k) = P(a_k) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i(a_k) = P(a_k) - \lambda_k = 0.$$

  - Ainsi Q admet au moins n racines distinctes et $\deg(Q) \leq n-1$. Donc $Q = 0$. D'où :

$$P = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i.$$

- Ainsi : il existe un unique $(\lambda_1,...,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $P = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i$ et :

$$(\lambda_1,...,\lambda_n) = (P(a_1),\ldots,P(a_n)).$$

(d) Soit $(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. D'après la question précédente, $P = \sum_{i=1}^{n} P(a_i) L_i$. Donc :

$$(\forall k \in [\![1,n]\!],\ P(a_k) = x_k) \Longleftrightarrow P = \sum_{i=1}^{n} x_i L_i,$$

d'après l'unicité des coefficients de la décomposition.

Ainsi : il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $P(a_k) = x_k$ et on a : $P = \sum_{i=1}^{n} x_i L_i$.

(e) i. Soit $i \in [\![1,n]\!]$, a_i est racine simple de Φ donc : $\Phi'(a_i) \neq 0$.

ii. D'après 1.d, $Q = \sum_{i=1}^{n} x_i L_i$.

De plus, soit $i \in [\![1,n]\!]$, on a :

$$Q = (X - a_i) \prod_{k \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\}} (X - a_k).$$

Donc :

$$Q' = \prod_{k \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\}} (X - a_k) + (X - a_i) \left(\prod_{k \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\}} (X - a_k) \right)'.$$

Ainsi : $Q'(a_i) = \prod_{k \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\}} (a_i - a_k)$. Donc :

$$Q(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\prod_{j \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\}} (X - a_j)}{\Phi'(a_i)}.$$

2. $|f|$ est une fonction continue sur le segment $[-1,1]$, donc, d'après le théorème des bornes atteintes, $|f|$ admet un maximum sur $[-1,1]$.

3. (a) i. $\varphi(t) = 0 \Longleftrightarrow f(t) - P(t) - \lambda\Phi(t) = 0 \Longleftrightarrow \lambda\varphi(t) = f(t) - P(t)$

Or $t \in [-1,1] \setminus \{a_1,\ldots,a_n\}$, donc $\Phi(t) \neq 0$, ainsi :

$$\lambda = \frac{f(t) - P(t)}{\Phi(t)} \text{ convient.}$$

ii.
- – Soit $i \in [\![1,n]\!]$, on a : $\varphi(a_i) = f(a_i) - P(a_i) - \lambda\Phi(a_i) = 0$.
  – $\varphi(t) = 0$

  Donc φ s'annule en $a_1, \dots a_n, t \in [0,1]$ ainsi φ s'annule $n+1$ fois au moins sur $[-1,1]$.
- Soient $-1 \leq b_1 < \cdots < b_{n+1} \leq 1$ tels que φ s'annule en b_j pour tout $j \in [\![1,n+1]\!]$.
  Soit $j \in [\![1,n]\!]$, φ est continue sur $[b_j, b_{j+1}]$, dérivable sur $]b_j, b_{j+1}[$ et $\varphi(b_j) = \varphi(b_{j+1})$. Donc, d'après le théorème de Rolle, il existe $c_j \in]b_j, b_{j+1}[$ tel que $\varphi'(c_j) = 0$. Comme $-1 \leq c_1 < \cdots < c_n \leq 1$, φ' s'annule au moins n fois sur $[-1,1]$.

iii. Par récurrence, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\varphi^{(k)}$ s'annule au moins $n+1-k$ fois sur $[-1,1]$ donc $\varphi^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur $[-1,1]$.

iv.
- On a : $\forall x \in [-1,1]$, $\varphi^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - P^{(n)}(x) - \lambda\Phi^{(n)}(x)$.
  Donc : $\varphi^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) - P^{(n)}(a) - \lambda\Phi^{(n)}(a)$.
  Or $\varphi^{(n)}(a) = 0$ donc :
  $$f^{(n)}(a) - P^{(n)}(a) - \lambda\Phi^{(n)}(a) = 0.$$
- On a $\deg P \leq n-1$ donc $P^{(n)} = 0$ ainsi :
  $$f^{(n)}(a) = \lambda\Phi^{(n)}(a).$$
- $\Phi = X^n + R$ avec $\deg R \leq n-1$ donc $\Phi^{(n)} = (X^n)^{(n)} + R^{(n)}$.
  Or $\deg R \leq n-1$ donc $R^{(n)} = 0$ et :
  $$(X^n)^{(n)} = \frac{n!}{(n-n)!}X^{n-n} = n!$$
  Donc :
  $$\Phi^{(n)} = n!$$
- D'où : $f^{(n)}(a) = \lambda n!$ donc $\lambda = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$.
  Or : $\lambda = \dfrac{f(t) - P(t)}{\Phi(t)}$, ainsi :
  $$f(t) - P(t) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\Phi(t).$$

(b) Soit $t \in [-1,1]$.
- Si $t \in \{a_1, \dots, a_n\}$ alors :
  $$|f(t) - P(t)| = 0 \leq \frac{M_n}{n!}|\Phi(t)|.$$
- Si $t \in [-1,1] \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ alors :
  $$|f(t) - P(t)| = \frac{|f^{(n)}(a)|}{n!}|\Phi(t)| \leq \frac{M_n}{n!}|\Phi(t)|.$$
- Dans tous les cas :
  $$|f(t) - P(t)| \leq \frac{M_n}{n!}|\Phi(t)|.$$

Exercice 7 *(Chapitre 25, exemple 15)*

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, soient $a_0, \dots, a_n$ des réels distincts. On pose :

$$\forall P, Q \in E,\ (P|Q) = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k).$$

1. Il est clair que $(.|.)$ est bilinéaire, symétrique et positif.
   Soit $P \in E$ tel que $(P|P) = 0$.
   On a $\sum_{k=0}^{n} P(a_k)^2 = 0$.
   Or $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $P(a_k)^2 \geq 0$ donc :$\forall k \in [\![0,n]\!]$, $P(a_k) = 0$.
   Ainsi P admet au moins $n+1$ racines distinctes et comme $\deg P \leq n$, on a $P = 0$.
   Donc $(.|.)$ est défini et est bien un produit scalaire.
2. Posons, pour tout $i \in [\![0,n]\!]$:
   $$L_i = \frac{\displaystyle\prod_{j \in [\![0,n]\!] \setminus \{i\}} (X - a_j)}{\displaystyle\prod_{j \in [\![0,n]\!] \setminus \{i\}} (a_i - a_j)}.$$

On remarque (voir problème précédent) que : $\forall i, k \in [\![0, n]\!]$, $L_i(a_k) = \delta_{i,k}$.
Soient $i, j \in [\![0, n]\!]$,

$$(L_i | L_j) = \sum_{k=0}^{n} L_i(a_k) L_j(a_k) = \sum_{k=0}^{n} \delta_{i,k}\delta_{j,k} = \delta_{i,j}.$$

Ainsi $(L_0, \dots, L_n)$ est une famille orthonormée de E.
Comme $\operatorname{Card}(L_0, \dots, L_n) = n+1 = \dim E$, alors $(L_0, \dots, L_n)$ est une base orthonormée de E.

3. On a : $F = \{P \in E, \sum_{k=0}^{n} P(a_k).1 = 0\} = \{P \in E, \sum_{k=0}^{n} (P|1) = 0\}$.
Ainsi $F = \operatorname{Vect}(1)^{\perp}$. Donc :

$$F^{\perp} = \operatorname{Vect}(1)^{\perp\perp} = \operatorname{Vect}(1).$$

4. On a $\|1\| = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} 1^2} = \sqrt{n+1}$. Ainsi $\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ est une base orthonormée de $F^{\perp}$.
Donc $p_{F^{\perp}}(Q) = (Q | \frac{1}{\sqrt{n+1}}) \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} Q(a_k)$.
Donc :

$$d(Q, F) = \|p_{F^{\perp}}(Q)\| = \frac{1}{n+1} \left| \sum_{k=0}^{n} Q(a_k) \right| \|1\| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left| \sum_{k=0}^{n} Q(a_k) \right|.$$