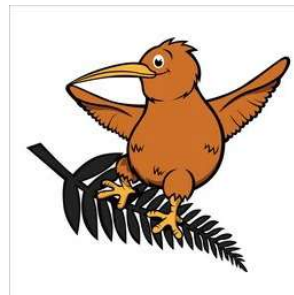


Problème complet d'algèbre



Problème 12 (Centrale PC 2016)



I L'opérateur de translation et l'opérateur de différence

I.A - L'opérateur de translation

1. Soit $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$, un polynôme non nul de $\mathbb{R}_n[X]$, de degré $d = \deg(P)$ (i.e. $a_d \neq 0$).
Alors, $\tau(P)$ est de la forme :

$$P(X+1) = \sum_{k=0}^d a_k (X+1)^k = a_d X^d + (d a_d + a_{d-1}) X^{d-1} + \sum_{k=0}^{d-2} b_k X^k$$

Comme $a_d \neq 0$:

$$\deg(\tau(P)) = \deg(P) \text{ et } \text{cd}(\tau(P)) = \text{cd}(P)$$

2. Notons que $\tau^0(P) = P$.
Et que si $\tau^k(P)(X) = P(X+k)$, alors $\tau^{k+1}(P)(X) = \tau(\tau^k(P))(X) = P((X+k)+1) = P(X+(k+1))$.
Ainsi, par récurrence

$$\forall k \in \mathbb{N}, \tau(P)(X) = P(X+k)$$

3. D'après la formule du binôme de Newton (changement de variable $i = h+1$),

$$\forall j \in \mathbb{N}_{n+1}, \tau(P_j)(X) = (X+1)^{j-1} = \sum_{h=0}^{j-1} \binom{j-1}{h} X^h = \sum_{i=1}^j \binom{j-1}{i-1} P_i$$

M est donc triangulaire supérieure et les coefficients de M vérifient donc

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, (M)_{i,j} = \begin{cases} \binom{j-1}{i-1} & \text{pour } i \leq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

4. Question non abordable en sup!

La matrice M est triangulaire supérieure, donc ses valeurs propres se trouvent sur la diagonale. Il s'agit des nombres $\binom{j-1}{j-1} = 1$.

Comme M et τ ont les mêmes valeurs propres,

$$\text{Sp}(\tau) = \{1\}$$

Si M était diagonalisable, elle serait alors semblable à la matrice unité, et donc elle serait égale à la matrice unité.
Ainsi,

$$M \text{ et } \tau \text{ ne sont pas diagonalisable}$$

5. 0 n'étant pas valeur propre de τ ,

τ est bijective

Puis si on considère $\bar{\tau} : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X], P(X) \mapsto P(X-1)$,

on montre qu'il s'agit d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Il vérifie : $\tau \circ \bar{\tau} = \bar{\tau} \circ \tau = \text{id}$:

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \tau(\bar{\tau}(P))(X) = \bar{\tau}(P)(X+1) = P(X) = \tau(\bar{\tau}(P))(X)$$

Donc

$\tau^{-1}(P)(X) = P(X-1)$

Puis, comme pour la question 2), on montre que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\tau^{-k}(P)(X) = P(X-k)$.

Donc la formule est toujours vraie :

$\forall k \in \mathbb{Z}, \tau(P)(X) = P(X+k)$

6. Avec l'expression de τ^{-1} , on applique la même méthode qu'en 3) et on obtient :

$$\forall j \in \mathbb{N}_{n+1}, \tau^{-1}(P_j)(X) = (X-1)^{j-1} = \sum_{h=0}^{j-1} \binom{j-1}{h} (-1)^{j-1-h} X^h = \sum_{i=1}^j (-1)^{j-i} \binom{j-1}{i-1} P_i$$

Puis

$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, (M^{-1})_{i,j} = \begin{cases} (-1)^{j-i} \binom{j-1}{i-1} & \text{pour } i \leq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

7. La $k+1^{\text{e}}$ ligne du calcul $V = Q \times U$ est justement

$$v_k = \sum_{j=1}^{n+1} Q_{k+1,j} u_{j-1} = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} u_j$$

On peut identifier (après changement d'indice) : $Q_{k,j} = \begin{cases} \binom{k-1}{j-1} & \text{pour } j \leq k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

On a donc

$Q = M^T$

8. M est inversible, donc $Q = M^T$ également et $Q^{-1} = (M^T)^{-1} = (M^{-1})^T$.

Puis par équivalence : $V = Q \times U \iff U = Q^{-1} \times V = (M^{-1})^T \times V$.

La $k+1^{\text{e}}$ ligne de ce calcul donne alors

$$u_k = \sum_{j=1}^{n+1} ((M^{-1})^T)_{k+1,j} v_{j-1} = \sum_{j=1}^{n+1} ((M^{-1}))_{j,k+1} v_{j-1} = \sum_{j=0}^n ((M^{-1}))_{j+1,k+1} v_j$$

$u_k = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} v_j$

9. On a alors

$v_k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \lambda^j = (\lambda+1)^k$

On vérifie bien :

$\sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} v_j = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (\lambda+1)^j (-1)^{k-j} = ((\lambda+1)-1)^k = u_k$

I.B - L'opérateur de différence

1. Avec les mêmes notations qu'en 1.A.1), avec P non constant on a :

$$\delta(P)(X) = a_d X^d + (da_d + a_{d-1})X^{d-1} + \sum_{k=0}^{d-2} b_k X^k - a_d X^d - a_{d-1} X^{d-1} - \sum_{k=0}^{d-2} a_k X^k = da_d X^{d-1} + \sum_{k=0}^{d-2} c_k X^k$$

Comme $a_d \neq 0$:

$$\boxed{\text{si } P, \text{ non constant, } \deg(\delta(P)) = \deg(P) - 1 \text{ et } \text{cd}(\delta(P)) = \deg(P) \times \text{cd}(P)}$$

2. D'après la question précédente, si P n'est pas constant, $\deg(P) \geq 1$ et $\deg(\delta(P)) \geq 0$, donc $\delta(P)$ n'est pas nul. Ainsi, si $\delta(P) = 0$, alors P est constant.

Réciproquement, si P est constant, le calcul (simple) donne $\delta(P) = 0$.

Donc

$$\boxed{\ker(\delta) = \mathbb{R}_0[X]}$$

La question précédente montre aussi que $\text{Im}(\delta) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Or d'après le théorème du rang : $\dim(\text{Im}(\delta)) = n + 1 - \dim(\ker(\delta)) = n = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X])$.

Donc :

$$\boxed{\text{Im}(\delta) = \mathbb{R}_{n-1}[X]}$$

3. Si $\ker(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[X]$, avec $j < n$.

$$P \in \ker(\delta^{j+1}) \iff \delta^{j+1}(P) = 0 = \delta^j(\delta(P)) \iff \delta(P) \in \mathbb{R}_{j-1}[X]$$

Donc

$$P \in \ker(\delta^{j+1}) \iff \deg(P) = \deg(\delta(P)) + 1 \leq (j-1) + 1 = j \iff P \in \mathbb{R}_j[X]$$

Ainsi, par récurrence :

$$\boxed{\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \ker(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[X]}$$

Si $P \in \text{Im}(\delta^j)$, alors il existe $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P = \delta^j(Q)$.

Or une récurrence simple (suite arithmétique) montre que $\deg P = \deg(Q) - j$, donc $\deg(P) \leq n - j$.

Par conséquent, $P \in \mathbb{R}_{n-j}[X]$, et donc $\text{Im}(\delta^j) \subset \mathbb{R}_{n-j}[X]$.

Le théorème du rang assure par ailleurs que ces deux espaces ont même dimension, donc :

$$\boxed{\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \text{Im}(\delta^j) = \mathbb{R}_{n-j}[X]}$$

4. Notons Δ , la matrice de δ dans la base (P_k) .

Par construction de $\delta = \tau - \text{id}$, on a $\Delta = M - I_{n+1}$.

Puis comme M commute avec I_{n+1} , alors d'après la formule de Newton : $\Delta^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} M^j$.

Ce qui permet d'affirmer, en revenant aux endomorphismes :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \delta^k = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \tau^j}$$

5. Si $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] = \ker(\delta^n)$, alors $\delta^n(P) = 0$. Donc :

$$0(X) = [\delta^n(P)](X) = \left[\sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} \tau^j(P) \right](X) = \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} [\tau^j(P)(X)] = \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(X+j)$$

il s'agit bien du polynôme nul.

Et en particulier en la valeur réelle $X = 0$:

$$\boxed{\sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(j) = 0}$$

6. a) $u \circ \delta^2 = u \circ [u^2 \circ u^2] = u^5 = [u^2 \circ u^2] \circ u = \delta^2 \circ u$.

Donc

$$\boxed{u \text{ et } \delta^2 \text{ commutent}}$$

b) Soit $P \in \mathbb{R}_1[X] = \ker \delta^2$, alors

$$\delta^2(u(P)) = u(\delta^2(P)) = u(0) = 0$$

Donc $u(P) \in \ker(\delta^2) = \mathbb{R}_1[X]$.

Par conséquent

$$\boxed{\mathbb{R}_1[X] \text{ est stable par } u}$$

c) Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ vérifie $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} = A \times A^2 = A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $a = d$ et $c = 0$, ainsi $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, puis $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$, et ainsi nécessairement $a = 0$, puis $2ab = 0$; ce qui est contradictoire avec $ab = 1$.

Donc

$$\boxed{\text{aucune matrice } A \text{ ne vérifie } A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

d) Puisque $\mathbb{R}_1[X]$ est stable par u , notons $\tilde{u} : \mathbb{R}_1[X] \rightarrow \mathbb{R}_1[X], P \mapsto u(P)$.

Considérons alors A , la matrice de $\tilde{u}$ dans la base (P_1, P_2) de $\mathbb{R}_1[X]$.

Alors A^2 est égale à la matrice de δ sur $\mathbb{R}_1[X]$ donc $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Or d'après la question précédente, ceci est impossible. Donc

$$\boxed{\text{Il n'existe pas d'endomorphisme } u \text{ de } \mathbb{R}_n[X] \text{ tel que } u^2 = \delta}$$

7. a) On a vu (questions I.B.3)) que $\deg(\delta^i(P)) = \deg(P) - i = d - i$.

Ainsi, la famille $(P, \delta(P), \dots, \delta^d(P))$ est une famille de degré échelonné (de d à 0).

$$\boxed{\text{C'est une famille libre et } \text{vect}(P, \delta(P), \dots, \delta^d(P)) = \mathbb{R}_d[X]}$$

b) Soit V stable par δ .

Si $P \in V$, alors $\delta^i(P) \in V$ et donc $\mathbb{R}_{\deg(P)}[X] = \text{vect}(P, \delta(P), \dots, \delta^n(P)) \subset V$.

Il reste à montrer l'égalité, il faut prendre le polynôme en degré maximum...

V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$. Notons $d = \dim(V) - 1$.

Notons $(e_0, \dots, e_d)$ une base de V . Nécessairement, l'un des e_i est un polynôme de degré supérieur ou égal à d .

Sinon, on aurait une famille libre de $d + 1$ vecteurs de $\mathbb{R}_d[X]$, ce qui est impossible.

Donc il existe P dans V de degré $r \geq d$.

Si $\deg P = r > d$, alors d'après la remarque précédente, $\mathbb{R}_r[X] = \text{vect}(P, \delta(P), \dots, \delta^r(P)) \subset V$ et V ne peut être de dimension $d + 1$. Donc il existe P de degré d dans V et $\mathbb{R}_d[X] \subset V$ et par égalité des dimensions :

$$\boxed{\text{il existe } d \in \llbracket 0, n \rrbracket \text{ tel que } V = \mathbb{R}_d[X]}$$

II Applications en combinatoire

II.A - Quelques cas particuliers

1. Si φ est une surjection de E sur F , alors nécessairement $\#F \leq \#E$. Donc

$$\boxed{\text{si } n > p, \text{ alors } S(p, n) = 0}$$

2. Une surjection d'un ensemble de cardinal n sur un ensemble de cardinal n est en fait une bijection. Donc

$$\boxed{S(n, n) = n!}$$

3. Les surjections de $\mathbb{N}_{n+1}$ sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ sont parfaitement déterminées -et de manière unique- par :

- Le choix de deux éléments de $\mathbb{N}_{n+1}$ qui auront la même image : $\binom{n+1}{2}$ possibilités

- Puis, la distribution des n éléments de l'ensemble d'arrivée, avec les n éléments de l'ensemble de départ (un de ces éléments étant double) : $n!$ possibilités

Le principe de décomposition permet alors d'affirmer que le cardinal recherché est le produit :

$$S(n+1, n) = \binom{n+1}{2} n! = \frac{n \times (n+1)!}{2}$$

II.B - Recherche d'une expression générale

1. *Le résultat ne fait pas partie du programme. Il faut le démontrer.*

Une application de $E = \mathbb{N}_p$ sur un ensemble $F = \llbracket 1, n \rrbracket$ est parfaitement définie -et de manière unique- par la donnée pour chacun des p éléments de E d'un unique élément de F . Donc pour chacun des p éléments de E , il y a n possibilités.

Le principe de décomposition permet alors d'affirmer que le cardinal recherché est le produit :

$$\text{le nombre d'applications de } \mathbb{N}_p \text{ sur } \llbracket 1, n \rrbracket \text{ est donc } n \times n \cdots \times n = n^p$$

2. Notons $I_k = \{\varphi : \mathbb{N}_p \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket \mid \#\varphi(\mathbb{N}_p) = k\}$. Alors, d'après la question précédente :

$$n^p = \sum_{k=1}^n \#I_k$$

Il reste à dénombrer I_k . Or les applications φ de I_k sont parfaitement déterminées -et de manière unique- par :

- Le choix de k éléments de $\mathbb{N}_n$ qui forment $\varphi(\mathbb{N}_p)$: $\binom{n}{k}$ possibilités
- Puis, le choix des surjections de $\mathbb{N}_p$ sur l'ensemble $\varphi(\mathbb{N}_p)$ à k éléments : $S(p, k)$ possibilités

Le principe de décomposition permet alors d'affirmer que le cardinal recherché est le produit :

$$n^p = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} S(p, k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} S(p, k)$$

avec la convention $S(p, 0) = 0$.

3. On applique alors la formule d'inversion trouvée en I.A.8), (p constant)

$$v_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u_k \iff u_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} v_k$$

avec $v_n = n^p$, $u_k = S(p, k)$, donc

$$\forall p \geq n, S(p, n) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p$$

4. Pour $p < n$, le polynôme $P = X^p$ appartient à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, donc d'après I.B.5),

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} P(k) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p = 0 = S(p, n)$$

On peut donc généraliser, de manière cohérente, la formule obtenue à la question précédente :

$$\forall p \in \mathbb{N}, S(p, n) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p$$

II.C

1. Avec les questions précédentes :

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^n = S(n, n) = n! \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^{n+1} = S(n+1, n) = \frac{n \times (n+1)!}{2}$$

III Etude d'une famille de polynômes

III.A - Généralités

1. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\deg(H_k) = k$.

Donc la famille $(H_0, H_1, \dots, H_n)$ est une famille de degrés échelonnés, donc elle est libre.
Elle est constituée de $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$ éléments de $\mathbb{R}_n[X]$. Donc

$$(H_0, H_1, \dots, H_n) \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X]$$

2. $\delta(H_0) = 1 - 1 = 0$.

Et pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\begin{aligned} \delta(H_k)(X) &= H_k(X+1) - H_k(X) = \frac{1}{k!} \left(\prod_{j=0}^{k-1} (X+1-j) - \prod_{j=0}^{k-1} (X-j) \right) = \frac{1}{k!} \left((X+1) \prod_{j=0}^{k-2} (X-j) - (X-k+1) \prod_{j=0}^{k-2} (X-j) \right) \\ \delta(H_k) &= \frac{1}{k!} \left(\prod_{j=0}^{k-2} (X-j) \right) ((X+1) - (X-k+1)) = \frac{1}{k!} \left(\prod_{j=0}^{k-2} (X-j) \right) \times k = H_{k-1} \end{aligned}$$

Bilan :

$$\delta(H_0) = 0 \text{ et pour tout } k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \delta(H_k) = H_{k-1}$$

3. Comme $\delta = \tau - \text{id}$, on a alors $\tau(H_0) = \delta(H_0) + H_0 = H_0$ et $\tau(H_k) = \delta(H_k) + H_k = H_k + H_{k-1}$.

Ainsi M' est exactement la matrice de τ dans la base $(H_0, H_1, \dots, H_n)$ de $\mathbb{R}_n$.

Par conséquent,

$$M \text{ et } M' \text{ sont semblables (matrice d'un même endomorphisme dans deux bases différentes)}$$

4. Pour tout $k, \ell \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a (par récurrence pour $\ell \geq k$) :

$$\delta^k(H_\ell) = \delta^{k-1}(H_{\ell-1}) = \begin{cases} H_{\ell-k} & \text{si } \ell \geq k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Puis comme $h \neq 0$, $H_h(0) = 0$ et $H_0(0) = 1$.

Par conséquent :

$$\delta^k(H_\ell)(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ell = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

5. Puisque (H_k) est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

il existe $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que $P = \sum_{\ell=0}^n a_\ell H_\ell$.

Puis, par linéarité :

$$\delta^k P(0) = \sum_{\ell} a_\ell \delta^k(H_\ell)(0) = a_k$$

Donc

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], P = \sum_{k=0}^n \delta^k(P)(0) H_k$$

III.B - Étude d'un exemple

1. Notons $T(X) = X^3 + 2X^2 + 5X + 7$.

Il s'agit de calculer $\delta^k(T)(0)$, pour k de 0 à 3. Or

$$T(X) = X^3 + 2X^2 + 5X + 7, \delta(T)(X) = 3X^2 + 7X + 8, \delta^2(T)(X) = 6X + 10, \delta^3(T)(X) = 6$$

On a donc

$$T = 6H_3 + 10H_2 + 8H_1 + 7H_0$$

2. Puisque $\delta^2(H_k) = H_{k-2}$, alors par linéarité :

$$\text{si } P = 6H_5 + 10H_4 + 8H_3 + 7H_2, \text{ on a } \delta^2(P) = 6H_3 + 10H_2 + 8H_1 + 7H_0$$

3. Considérons (p_n) une solution particulière.

Toute autre solution (u_n) vérifie :

$$\begin{aligned}\forall k \in \mathbb{N}, (u-p)_{k+2} - 2(u-p)_{k+1} + (u-p)_k &= (u_{k+2} - 2u_{k+1} + u_k) - (p_{k+2} - 2p_{k+1} + p_k) \\ &= (k^3 + 2k^2 + 5k + 7) - (k^3 + 2k^2 + 5k + 7) = 0\end{aligned}$$

Donc la suite $(u-p)_n$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

Son équation caractéristique est $r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2$,

et il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = p_n + (A + Bn)1^n$

Reste à trouver une solution particulière. On a vu que $\delta^2(P)(X) = P(X+2) - 2P(X+1) + P(X)$.

Avec P tel que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\delta^2(P)(k) = k^3 + 2k^2 + 5k + 7$ et $p_k = P(k)$, on a une solution particulière.

Enfin, comme pour $k \geq h$, $H_h(k) = \frac{1}{h!} k(k-1) \dots (k-(h-1)) = \frac{1}{h!} \times \frac{k!}{(k-h)!} = \binom{k}{h}$, et pour $k < h$, $H_h(k) = 0$; on a

il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k = A + Bk + 6\binom{k}{5} + 10\binom{k}{4} + 8\binom{k}{3} + 7\binom{k}{2}$

avec convention : $\binom{k}{h} = 0$ si $h > k$

III.C - Polynômes à valeurs entières

1. Le calcul a été fait plus haut pour les nombres entiers naturels.

Si $k < 0$, en notant $p = -k$, on a :

$$H_n(k) = \frac{1}{n!} k(k-1) \dots (k-(n-1)) = \frac{1}{n!} (-p)(-p-1) \dots (-p-(n-1)) = \frac{1}{n!} (-1)^n \frac{(p+n-1)!}{(p-1)!} = (-1)^n \binom{p+n-1}{n}$$

Finalement

$$H_n(k) = \begin{cases} \binom{k}{n} & \text{si } k \geq n \\ 0 & \text{si } k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \\ (-1)^n \binom{n-1-k}{n} & \text{si } k < 0 \end{cases}$$

2. Tous les coefficients binomiaux sont entiers (puisque'il s'agit d'un cardinal d'un ensemble), donc pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $H_n(k) \in \mathbb{Z}$.

$$H_n(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$$

3. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$\delta(P)(k) = P(k+1) - P(k)$$

Par soustraction de nombres entiers, il s'agit d'un nombre entier. Donc

Si P est à valeurs entières sur les entiers, alors il en est de même pour $\delta(P)$

4. Si P est à valeurs entières sur les entiers,

alors par récurrence (sur $h \in \mathbb{N}$), pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$, $\delta^h(P)(k) \in \mathbb{Z}$;

et donc en particulier $\delta^h(P)(0) \in \mathbb{Z}$, et les coordonnées de P dans la base (H_k) sont des entières.

Réciproquement, si les coordonnées de P dans la base (H_k) sont des entiers,

alors $P = \sum_{i=0}^d a_i H_i$, puis $P(k) = \sum_{i=0}^d a_i H_i(k) \in \mathbb{Z}$ (combinaison linéaire d'entiers).

Bilan :

P est à valeurs entières sur les entiers si et seulement si ses coordonnées dans (H_k) sont entières

5. Supposons que P , de degré d , est à valeurs entières sur les entiers,

Alors d'après les questions précédentes, il existe $a_0, a_1 \dots a_d \in \mathbb{Z}$ tels que $P = \sum_{i=0}^d a_i H_i$.

Et donc

$$d!P = \sum_{i=0}^d a_i \times d!H_i = \sum_{i=0}^d \left(a_i \times d(d-1) \dots (i+1) \times \prod_{j=0}^{i-1} (X-j) \right)$$

Il s'agit bien d'un polynôme $d!P$ à coefficients entiers.

Comme le montre le polynôme $P = \frac{1}{2}X^2$, de degré 2 :

on a $2!P$ à coefficients entiers, mais $P(1) = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.

La réciproque est donc fausse.

IV Généralisation de l'opérateur de différence et application

IV.A -

1. $x \mapsto x+1$ est $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
Par composition, $x \mapsto f(x+1)$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Puis par addition

$$\delta \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ de } \mathbb{R}_+^*$$

Puis pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\delta(f')(x) = f'(x+1) - f'(x) \text{ et } (\delta(f))'(x) = f'(x+1) - f'(x)$$

Donc

$$\delta(f') = (\delta(f))'$$

2. Même démonstration qu'en I.B.4),

$$\forall n \in \mathbb{N}, (\delta^n(f))(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x+k)$$

3. Soit $x > 0$.

Appliquons le théorème des accroissements finis à f , de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x, x+1]$,

$$\exists c \in]x, x+1[\text{ tel que } \delta(f)(x) = f(x+1) - f(x) = f'(c) \times (x+1-x) = f'(c)$$

En faisant le changement de variable $y_1 = c - x$,

$$\text{pour tout } x > 0, \text{ il existe } y_1 \in]0, 1[\text{ tel que } \delta(f)(x) = f(x+y_1)$$

4. Nous allons procéder par récurrence. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathcal{P}_n : \ll \forall x > 0, \forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*), \exists y_n \in]0, n[\text{ tel que } \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f(x+j) = f^{(n)}(x+y_n) \gg$$

- La réponse de IV.A.3) montre que $\mathcal{P}_1$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie.
Soit $x > 0$, il existe $y_n \in]0, n[$ ($\mathcal{P}_n$ à δf) tel que :

$$\delta^{n+1}(f)(x) = \delta^n(\delta f)(x) = (\delta f)^{(n)}(x+y_n)$$

Puis par commutation de l'opération différence et dérivation :

$$\delta^{n+1}(f)(x) = (\delta f)^{(n)}(x+y_n) = \delta(f^{(n)})(x+y_n) = f^{(n)}(x+y_n+1) - f^{(n)}(x+y_n)$$

On applique l'égalité des accroissements finis à $f^{(n)}$, il existe $c \in]x+y_n, x+y_n+1[$ tel que

$$f^{(n)}(x+y_n+1) - f^{(n)}(x+y_n) = (f^{(n)})'(c) \times ((x+y_n+1) - (x+y_n)) = f^{(n+1)}(c)$$

Enfin, d'après IV.A.2) :

$$\delta^{n+1}(f)(x) = \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^{n+1-j} \binom{n+1}{j} f(x+j) = f^{(n+1)}(c)$$

En prenant $y_{n+1} = c - x$, alors $y_{n+1} \geq x + y_n - x \geq y_n \geq 0$ et $y_{n+1} \leq x + y_n + 1 - x \leq y_n + 1 \leq n + 1$. Ainsi, on a donc $\mathcal{P}_{n+1}$ qui est vérifiée.

Par conséquent,

$$\forall x > 0, \forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*), \forall n \in \mathbb{N}, \exists y_n \in]0, n[\text{ tel que } \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f(x+j) = f^{(n)}(x+y_n)$$

IV.B -

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

Il existe $p_1, \dots, p_i$, i nombres premiers et $a_1, a_2 \dots a_i \in \mathbb{N}$ tel que $k = \prod_{j=1}^i p_j^{a_j}$.

On a alors

$$k^\alpha = \prod_{j=1}^i (p_j^{a_j})^\alpha = \prod_{j=1}^i (p_j^\alpha)^{a_j}$$

Il s'agit de produit de nombres entiers naturels non nuls, donc

$$k^\alpha \text{ est un nombre entier naturel}$$

2. Si $\alpha < 0$, alors

$$2^\alpha = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\alpha} < 1$$

Or on a vu que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $k^\alpha \in \mathbb{N}^*$, donc $k^\alpha \geq 1$. On a une contradiction,

$$\alpha \in \mathbb{R}_+$$

3. Si α est un entier naturel, alors $f_\alpha^{(\alpha)} = \alpha!$ et donc $f_\alpha^{(\alpha+1)} = 0$;
donc l'une au moins des dérivées de f_α s'annule en au moins un réel strictement positif.
Réciproquement, s'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $x_0 > 0$ tels que $f_\alpha^{(n)}(x_0) = 0$;
or on sait que pour tout réel x ,

$$f_\alpha^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$$

Donc si $f_\alpha^{(n)}(x_0) = 0$, alors comme $x_0 > 0$, on a nécessairement : $\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1) = 0$;
et donc il existe $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que $\alpha - k = 0$ donc $\alpha = k \in \mathbb{N}$. Ainsi :

$$\alpha \in \mathbb{N} \text{ ssi il existe } n \in \mathbb{N} \text{ et } x_0 > 0 \text{ tels que } f_\alpha^{(n)}(x_0) = 0$$

IV.C -

1. D'après IV.B.1), pour tout k entier, $k^\alpha \in \mathbb{N}$,
donc pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $f_\alpha(x+j) \in \mathbb{N}$ puisque x entier.
Puis par stabilité par multiplication et additions d'entiers :

$$\sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f_\alpha(x+j) \in \mathbb{N}$$

2. On applique directement la relation (IV.1.) :

$$\exists y_n \in]0, n[\text{ tel que } \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f_\alpha(x+j) = f_\alpha^{(n)}(x+y_n) = \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha - \lfloor \alpha \rfloor)}{(x+y_n)^{\lfloor \alpha \rfloor + 1 - \alpha}}$$

Donc comme $y_n \geq 0$,

$$0 \leq \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f_\alpha(x+j) \leq \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha - \lfloor \alpha \rfloor)}{x^{\lfloor \alpha \rfloor + 1 - \alpha}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

3. Comme cette limite pour $x \rightarrow +\infty$ est nulle, on peut prendre $\varepsilon = \frac{1}{2}$; il existe $A > 0$ tel que pour tout $x \geq A$ et entier :
 $\sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f_\alpha(x+j) \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$.
Or cette somme est entière, donc elle est nécessairement nulle.
Ainsi, pour tout $x \geq A$, $\sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f_\alpha(x+j) = 0 = f^{(n)}(x+y_n)$.
Donc, une dérivée de f_α s'annule en au moins un réel strictement positif. D'après IV.B.3),

$$\alpha \text{ est donc un entier naturel}$$