

Correction de la séance 14

Problèmes : Déterminants et séries



Exercice de calcul (Chapitre 9, exemple 15)

On pose : $-3y'' - 2y' + y = \cos(x)$ (E).

- On résout $-3y'' - 2y' + y = 0$ (E_0).

L'équation caractéristique associée à (E_0) est $-3r^2 - 2r + 1 = 0$, ses racines sont -1 et $\frac{1}{3}$. Donc les solutions de (E_0) sont :

$$x \mapsto \lambda e^{-x} + \mu e^{x/3}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

- Comme i n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution de (E) de la forme $y : x \mapsto A \cos x + B \sin x$. Alors :

$$-3y'' - 2y' + y = \cos(x) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (-4A - 2B) \cos x + (2A - 4B) \sin x = \cos x \Leftrightarrow \begin{cases} -4A - 2B = 1 \\ 2A - 4B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -\frac{1}{10} \\ A = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

car $(\cos, \sin)$ libre

- Donc les solutions de (E) sont :

$$x \mapsto \lambda e^{-x} + \mu e^{x/3} - \frac{1}{5} \cos x - \frac{1}{10} \sin x, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Inégalité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$|f_n(x)| \leq \frac{n \left| \frac{x}{n} \right|}{x(1+x^2)} \leq \frac{1}{1+x^2}.$$

Posons $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, alors f convient.



Problème 9 (E3A PC 2012)

Question préliminaire

$(1+\alpha)(1+\beta) = 1 + \alpha + \beta + \alpha\beta \geq 1 + \alpha + \beta$ puisque $\alpha\beta \geq 0$.

$$1. \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -v_1 \\ u_1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + u_1 v_1$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -v_1 & 0 \\ u_1 & 1 & -v_2 \\ 0 & u_2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + u_2 v_2 - u_1 \begin{vmatrix} 1 & -v_1 \\ u_1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + u_2 v_2 - u_1(-v_1) = 1 + u_2 v_2 + u_1 v_1 \text{ par développement par rapport à la première colonne}$$

2. Développons Δ_n par rapport à sa dernière ligne :

$$\Delta_n = (-1)^{n+1+n} u_n \begin{vmatrix} & & 0 \\ & \Delta_{n-2} & \vdots \\ & & 0 \\ 0 & \cdots & -v_n \end{vmatrix} + \Delta_{n-1}$$

Puis par développement par rapport à la dernière ligne,

$$\Delta_n = u_n v_n \Delta_{n-2} + \Delta_{n-1}$$

3. Il est clair que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Delta_n \geq 0$.

La relation est vraie pour $n = 1$ et $n = 2$ puisque Δ_1 et Δ_2 sont des sommes de termes positifs.

Soit $n \geq 2$. Supposons la relation vraie au rang n et $n-1$.

Alors, puisque $a_{n+1} \geq 0$, $\Delta_{n+1} = \Delta_n + a_{n+1} \Delta_{n-1} \geq 0$, montrant ainsi la relation vérifiée au rang $n+1$.

Conclusion : $\forall n \geq 1, \Delta_n \geq 0$ et alors, $\forall n \geq 3, \Delta_n - \Delta_{n-1} = a_n \Delta_{n-2} \geq 0$.

On a également $\Delta_2 - \Delta_1 = u_2 v_2 \geq 0$ et on en conclut que $(\Delta_n)_n$ est croissante.

4. On a l'égalité pour $n = 1$ et $\Delta_2 = 1 + u_2 v_2 + u_1 v_1 \leq (1 + a_1)(1 + a_2)$ par la question préliminaire.

Supposons la relation vérifiée aux rangs n et $n-1$.

Alors

$$\Delta_{n+1} \leq \prod_{k=1}^n (1 + a_k) + a_{n+1} \prod_{k=1}^{n-1} (1 + a_k) = \prod_{k=1}^{n-1} (1 + a_k)(1 + a_n + a_{n+1}) \leq \prod_{k=1}^{n-1} (1 + a_k)(1 + a_n)(1 + a_{n+1}) = \prod_{k=1}^{n+1} (1 + a_k)$$

On a utilisé la question préliminaire.

Ceci termine la récurrence.

5. 5.1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est clairement strictement positif. On peut donc considérer la suite $(\ln P_n)_n$.

Or, $\forall n \in \mathbb{N}, \ln P_n = S_n$.

La suite $(S_n)_n$ est la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n \geq 1} \ln(1 + a_n)$.

Or cette série est une série convergente car :

- * elle est à termes positifs.
- * $\ln(1 + a_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} a_n$.
- * $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge
- * On conclut par critère d'équivalence.

Ainsi, $(S_n)_n$ converge donc $(\ln P_n)_n$ converge. Par continuité de exp et caractérisation séquentielle de la continuité, $(P_n)_n$ converge. On peut même préciser vers une limite strictement positive.

5.2 Etant convergente, la suite $(P_n)_n$ est majorée. L'inégalité du 4 nous montre ainsi que $(\Delta_n)_n$ est majorée. Etant croissante et majorée, elle converge alors.

6. (a) à vérifier par récurrence sur n .

(b) Considérons la suite des sommes partielles $(T_n)_n$ de la série $\sum_{n \geq 2} t_n$:

$$\forall n \geq 2, T_n = \sum_{k=2}^n t_k = \Delta_n - \Delta_1, \text{ par télescopie.}$$

Par hypothèse, $(\Delta_n)_n$ converge donc il en est de même pour $(T_n)_n$, ce qui signifie que la série $\sum_{n \geq 2} t_n$ converge.

6.3 $\forall n \geq 3, t_n = a_n \Delta_{n-2} \geq a_n \geq 0$ par 6.1.

Par critère de comparaison des séries à termes positifs, et puisque la série $\sum_{n \geq 2} t_n$ converge, on obtient la convergence

de la série $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge

7. On a établi l'équivalence entre la convergence de la suite $(\Delta_n)_n$ et la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} a_n$



Problème 10 (Problème (donné en cours) : Formule de Stirling)

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \ln \frac{u_{n+1}}{u_n} \\ &= \ln \left(\frac{(n+1)!}{n!} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \left(\frac{e}{n+1} \right)^{n+1} \left(\frac{n}{e} \right)^n \right) \\ &= \ln \left((n+1) \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} e \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \ln \left(e \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1/2} \right) \\ &= 1 + \left(n + \frac{1}{2} \right) \ln \left(\frac{n}{n+1} \right) \\ &= 1 - \left(n + \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \\ &= 1 - \left(n + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) \\ &= 1 - \left(1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \\ &= -\frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &\sim -\frac{1}{12n^2} \end{aligned}$$

- (b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $-\frac{1}{12n^2}$ donc $\sum (v_{n+1} - v_n)$ et $\sum -\frac{1}{12n^2}$ sont de même nature.
Or $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, ainsi $\sum (v_{n+1} - v_n)$ converge.
Or $\sum (v_{n+1} - v_n)$ est une série télescopique donc (v_n) converge.
(c) Posons $l = \lim v_n$, alors $\lim u_n = e^l \neq 0$. Donc :

$$u_n = \frac{n!}{\sqrt{n}} \left(\frac{e}{n} \right)^n \sim e^l.$$

Posons $k = e^l > 0$, alors :

$$n! \sim k\sqrt{n} \left(\frac{n}{e} \right)^n.$$

2. (a) i. $\bullet I_0 = \int_0^{\pi/2} 1 dt = \frac{\pi}{2}$
 $\bullet I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin(t) dt = [-\cos(t)]_0^{\pi/2} = 1$
 ii. Soit $n \geq 2$. On effectue l'intégration par parties :

$$\begin{aligned} u(t) &= \sin^{n-1}(t) & u'(t) &= (n-1)\cos(t)\sin^{n-2}(t) \\ v'(t) &= \sin(t) & v(t) &= -\cos(t) \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} I_n &= [-\cos(t)\sin^{n-1}(t)]_0^{\pi/2} + (n-1) \int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\sin^{n-2}(t) dt \\ &= (n-1) \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2(t)) \sin^{n-2}(t) dt \\ &= (n-1)(I_{n-2} - I_n). \end{aligned}$$

Donc $nI_n = (n-1)I_{n-2}$ et ainsi :

$$\forall n \geq 2, I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

- iii. Soit $p \in \mathbb{N}$.

- Soit $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on a :

$$\frac{I_{2k}}{I_{2(k-1)}} = \frac{2k-1}{2k},$$

donc :

$$\prod_{k=1}^p \frac{I_{2k}}{I_{2(k-1)}} = \prod_{k=1}^p \frac{2k-1}{2k}.$$

Ainsi, par produit télescopique :

$$\frac{I_{2p}}{I_0} = \prod_{k=1}^p \frac{2k-1}{2k} = \prod_{k=1}^p \frac{(2k-1)(2k)}{(2k)^2} = \frac{\prod_{k=1}^p (2k-1)(2k)}{\prod_{k=1}^p (2k)^2} = \frac{(2p)!}{(2^p \prod_{k=1}^p k)^2} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}.$$

Ainsi :

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \frac{\pi}{2}.$$

iv. De même :

$$\frac{I_{2p+1}}{I_1} = \prod_{k=1}^p \frac{2k}{2k+1} = \prod_{k=1}^p \frac{(2k^2)}{(2k)(2k+1)} = \frac{\prod_{k=1}^p (2k^2)}{\prod_{k=1}^p (2k)(2k+1)} = \frac{(2^p \prod_{k=1}^p k)^2}{(2p+1)!} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}.$$

Ainsi :

$$I_{2p+1} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}.$$

- (b) i. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a : $0 \leq \sin t \leq 1$. Donc : $\sin^{2p+1}(t) \leq \sin^{2p}(t) \leq \sin^{2p-1}(t)$.
Donc, par croissance de l'intégrale :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, I_{2p+1} \leq I_{2p} \leq I_{2p-1}.$$

- ii. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$1 \leq \frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} \leq \frac{I_{2p-1}}{I_{2p+1}} = \frac{2p+1}{2p}.$$

Donc, par théorème d'encadrement :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} = 1.$$

- iii. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \frac{\pi}{2} \frac{(2p+1)!}{(2^p p!)^2} = \left(\frac{(2p)!}{2^{2p} (p!)^2} \right)^2 (2p+1) \frac{\pi}{2}.$$

Or $\frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} \sim 1$ donc $\left(\frac{(2p)!}{2^{2p} (p!)^2} \right)^2 (2p+1) \frac{\pi}{2} \sim 1$. D'où, comme $2p+1 \sim 2p$, on a :

$$\frac{1}{p} \left(\frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p)!} \right)^2 \sim \pi.$$

3. D'après 1.e :

$$\frac{1}{p} \left(\frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p)!} \right)^2 \sim \frac{1}{p} \left(\frac{2^{2p} k^2 p \left(\frac{p}{e}\right)^{2p}}{k \sqrt{2p} \left(\frac{2p}{e}\right)^{2p}} \right)^2 = \frac{1}{p} \left(k \sqrt{\frac{p}{2}} \right)^2.$$

Donc :

$$\frac{1}{p} \left(\frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p)!} \right)^2 \sim \frac{k^2}{2}.$$

4. Ainsi $\frac{k^2}{2} = \pi$ donc $k = \sqrt{2\pi}$, d'où :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n.$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n u_k &= \sum_{k=1}^n \left(k \ln \frac{2k+1}{2k-1} - 1 \right) \\
 &= \sum_{k=1}^n k (\ln(2k+1) - \ln(2k)) - n \\
 &= \sum_{k=1}^n ((k+1) \ln(2k+1) - k \ln(2k)) - \sum_{k=1}^n \ln(2k+1) - n \\
 &= (n+1) \ln(2n+1) - \sum_{k=1}^n \ln(2k+1) - n \\
 &= \ln(2n+1)^{n+1} - \ln \prod_{k=1}^n (2k+1) - n \\
 &= \ln(2n+1)^{n+1} - \ln \frac{(2n+1)!}{2^n \cdot n!} - \ln(e^n) \\
 &= \ln \left(\frac{(2n+1)^{n+1} \cdot 2^n \cdot n!}{(2n+1)! e^n} \right) \\
 &= \ln \left(\frac{(2n+1)^n \cdot 2^n \cdot n!}{(2n)! e^n} \right)
 \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}
 \frac{(2n+1)^n \cdot 2^n \cdot n!}{(2n)! e^n} &\sim \frac{(2n+1)^n \cdot 2^n \cdot \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n}{\sqrt{4\pi n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} e^{2n}} \\
 &\sim \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(2n+1)^n}{\left(\frac{2n}{e}\right)^n e^n} \\
 &\sim \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2n+1}{2n} \right)^n \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{1}{2n} \right)^n \sim \frac{1}{\sqrt{2}} e^{n \ln(1 + \frac{1}{2n})}
 \end{aligned}$$

Or $n \ln(1 + \frac{1}{2n}) \sim \frac{1}{2}$ donc :

$$\lim \frac{(2n+1)^n \cdot 2^n \cdot n!}{(2n)! e^n} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{1/2}.$$

D'où :

$$\lim \sum_{k=1}^n u_k = \ln \frac{1}{\sqrt{2}} e^{1/2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln(2).$$

Ainsi $\sum u_n$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln(2).$$