

## Difficiles en algèbre linéaire

 **Exercice de calcul** (Chapitre 18, exemple 8)1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + e^{-k/n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right),$$

où  $f : x \mapsto \frac{1}{1+e^{-x}}$  est continue sur  $[0, 1]$ . Donc, par sommes de Riemann :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + e^{-k/n}} &= \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx \\ &= [\ln(e^x + 1)]_0^1 = \ln(e + 1) - \ln(2) = \ln \frac{e+1}{2}. \end{aligned}$$

2. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3 + k^2 n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right),$$

où  $f : x \mapsto \frac{x^2}{1+x^2}$  est continue sur  $[0, 1]$ . Donc, par sommes de Riemann :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3 + k^2 n} &= \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx \\ &= [x - \text{Arctan}(x)]_0^1 = 1 - \text{Arctan}(1) = 1 - \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

3. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{1}{n^2} \prod_{k=1}^n (k^2 + n^2)^{1/n}\right) &= \ln\left(\prod_{k=1}^n \left(\frac{k^2 + n^2}{n^2}\right)^{1/n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k^2 + n^2}{n^2}\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(\left(\frac{k}{n}\right)^2 + 1\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right), \end{aligned}$$

où  $f : x \mapsto \ln(x^2 + 1)$  est continue sur  $[0, 1]$ . Donc, par sommes de Riemann :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1}{n^2} \prod_{k=1}^n (k^2 + n^2)^{1/n}\right) = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \ln(x^2 + 1) dx.$$

Donc, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1}{n^2} \prod_{k=1}^n (k^2 + n^2)^{1/n}\right) &= [x \ln(1+x^2)]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2}{1+x^2} dx = \ln(2) - 2 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx \\ &= \ln(2) - 2[x - \text{Arctan}(x)]_0^1 = \ln(2) - 2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \prod_{k=1}^n (k^2 + n^2)^{1/n} = \exp(\ln(2) - 2(1 - \frac{\pi}{4})) = \frac{2}{e^{2 - \frac{\pi}{2}}}.$$

## Inégalité

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} |f_n(x) - |x||^2 &= \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x| \right|^2 = x^2 + \frac{1}{n} - 2|x|\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + x^2 \\ &\leq 2x^2 + \frac{1}{n} - 2|x|\sqrt{x^2} \leq \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Donc :

$$|f_n(x) - |x|| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Posons :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ . On a :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, |f_n(x) - |x|| \leq u_n$  et  $\lim u_n = 0$  donc  $(u_n)$  convient.



### Exercice 30 (Chapitre 19, exemple 9)

- On pose  $G = \ker f$ . Soit  $F$  un supplémentaire de  $G$  dans  $E$ , soit  $p$  la projection sur  $F$  parallèlement  $G$ .
- Soit  $(e_1, \dots, e_k)$  une base de  $F$ , soit  $(e_{k+1}, \dots, e_n)$  une base de  $G$ . Comme  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $E$ , alors  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$ .
- Posons :  $\forall j \in \llbracket 1, k \rrbracket, f_j = f(e_j)$ .

Montrons que la famille  $(f_1, \dots, f_k)$  est libre.

Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$  tels que  $\sum_{j=1}^k \lambda_j f_j = 0$ .

Alors :  $\sum_{j=1}^k \lambda_j f(e_j) = 0$  donc  $f\left(\sum_{j=1}^k \lambda_j e_j\right) = 0$ .

Ainsi  $\sum_{j=1}^k \lambda_j e_j \in \ker f = G$ .

Or  $(e_1, \dots, e_k)$  une base de  $F$  donc  $\sum_{j=1}^k \lambda_j e_j \in F$ .

Ainsi :  $\sum_{j=1}^k \lambda_j e_j \in F \cap G = \{0\}$  donc  $\sum_{j=1}^k \lambda_j e_j = 0$ .

Or la famille  $(e_1, \dots, e_k)$  est libre, donc :

$$\forall j \in \llbracket 1, k \rrbracket, \lambda_j = 0.$$

Donc la famille  $(f_1, \dots, f_k)$  est libre.

- D'après le théorème de la base incomplète, il existe  $f_{k+1}, \dots, f_n \in E$  tels que  $(f_1, \dots, f_n)$  soit une base de  $E$ .
- Soit  $g$  l'unique endomorphisme de  $E$  tel que :

$$\forall j \in \llbracket 1, k \rrbracket, g(e_j) = f_j.$$

Comme l'image de la base  $(e_1, \dots, e_n)$  par  $g$  est une base, alors  $g$  est un isomorphisme.

Ainsi :  $g \in GL(E)$ .

- Montrons que  $f = g \circ p$ .

- Soit  $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$ , on a :

$$g \circ p(e_j) = g(e_j) = f_j = f(e_j)$$

car  $e_j \in F$  et  $p$  projection sur  $F$ .

- Soit  $j \in \llbracket k+1, n \rrbracket$ , on a :

$$g \circ p(e_j) = g(0) = 0 = f(e_j)$$

car  $e_j \in G$  et  $p$  projection parallèlement à  $G$  et  $G = \ker f$ .

- Comme  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$  et  $g \circ p, f \in \mathcal{L}(E)$ , alors :

$$f = g \circ p.$$

- Donc  $g$  et  $p$  conviennent.



### Exercice 31 (Chapitre 19, exercice 23)

- Supposons qu'il existe  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $\text{Im } u = F$  et  $\ker u = G$ . Alors, d'après le théorème du rang :

$$n = \dim \ker u + \dim \text{Im } u = \dim F + \dim G.$$

- Supposons  $\dim F + \dim G = n$ .

Posons  $p = \dim G$ , alors  $\dim F = n - p$ .

Soit  $(e_1, \dots, e_p)$  une base de  $G$  et  $(f_1, \dots, f_{n-p})$  une base de  $F$ .

Comme  $(e_1, \dots, e_p)$  est libre, d'après le théorème de la base incomplète, il existe  $e_{p+1}, \dots, e_n$  tels que  $(e_1, \dots, e_n)$  soit une base de  $E$ .

Soit  $u$  l'unique application de  $\mathcal{L}(E)$  telle que :

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, u(e_k) = 0$$

$$\forall k \in \llbracket p+1, n \rrbracket, u(e_k) = f_{k-p}.$$

Comme  $(e_1, \dots, e_n)$  est une famille génératrice de  $E$ , alors  $(u(e_1), \dots, u(e_n))$  est une famille génératrice de  $\text{Im } u$ . Donc :

$$\text{Im } u = \text{Vect}(u(e_1), \dots, u(e_n)) = \text{Vect}(0, \dots, 0, f_1, \dots, f_{n-p}) = \text{Vect}(f_1, \dots, f_{n-p}) = F.$$

De plus :

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, e_k \in \ker u.$$

Donc, comme  $\ker u$  est un espace vectoriel :

$$\text{Vect}(e_1, \dots, e_p) \subset \ker u.$$

D'après le théorème du rang :  $\dim(E) = \text{rg } u + \dim(\ker u)$ . Donc  $\dim(\ker u) = n - \text{rg } u$ .

Or  $\text{Im } u = \text{Vect}(f_1, \dots, f_{n-p})$ , et comme  $(f_1, \dots, f_{n-p})$  est libre,  $(f_1, \dots, f_{n-p})$  est une base de  $\text{Im } u$ . Ainsi  $\text{rg } u = \dim \text{Im } u = n - p$ .

Donc  $\dim(\ker u) = n - (n - p) = p$ .

Or  $\text{Vect}(e_1, \dots, e_p) \subset \ker u$  et  $\dim(\ker u) = p = \dim \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ .

Donc :

$$\ker u = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p) = G.$$

Ainsi  $u$  convient.

- Ainsi : il existe  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $\text{Im } u = F$  et  $\ker u = G$  ssi  $\dim F + \dim G = n$ .



### Exercice 32 (Chapitre 20, exercice 20)

- Supposons qu'il existe  $P \in GL_p(\mathbb{K})$ ,  $Q \in GL_n(\mathbb{K})$  tels que  $A = QJ_rP$ . Alors comme  $P$  et  $Q$  sont inversibles :

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(J_rP) = \text{rg}(J_r) = r.$$

En effet, si on note  $C_1, \dots, C_p$  les colonnes de  $J_r$ , on a :

$$\text{rg}(J_r) = \dim \text{Vect}(C_1, \dots, C_p) = \dim \text{Vect}(C_1, \dots, C_r) = r,$$

car  $(C_1, \dots, C_r)$  car il s'agit des  $r$  premiers vecteurs de la base canonique de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ .

- Supposons que  $\text{rg}(A) = r$ .

Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$  l'application linéaire canoniquement associée à  $A$ . Notons  $\mathcal{C}_1$  (resp.  $\mathcal{C}_2$ ) la base canonique de  $\mathbb{K}^p$  (resp.  $\mathbb{K}^n$ ).

D'après le théorème du rang,  $\dim \ker f = p - r$ , donc soit  $(e_{r+1}, \dots, e_p)$  une base de  $\ker f$ .

Comme  $(e_{r+1}, \dots, e_p)$  est libre, d'après le théorème de la base incomplète, il existe  $e_1, \dots, e_r \in \mathbb{K}^p$  tels que  $\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_p)$  soit une base de  $\mathbb{K}^p$ .

Comme  $\mathcal{B}_1$  est génératrice de  $\mathbb{K}^p$ , alors  $(f(e_1), \dots, f(e_p))$  est génératrice de  $\text{Im } f$ . Or :  $\forall k > r, f(e_k) = 0$  donc  $(f(e_1), \dots, f(e_r))$  est génératrice de  $\text{Im } f$ .

Or :  $\text{Card}(f(e_1), \dots, f(e_r)) = r = \text{rg}(f) = \dim(\text{Im } f)$ , donc  $(f(e_1), \dots, f(e_r))$  est une base de  $\text{Im } f$ .

Comme  $(f(e_1), \dots, f(e_r))$  est libre, d'après le théorème de la base incomplète, il existe  $g_{r+1}, \dots, g_n \in \mathbb{K}^n$  tels que  $\mathcal{B}_2 = (f(e_1), \dots, f(e_r), g_{r+1}, \dots, g_n)$  soit une base de  $\mathbb{K}^n$ .

On a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & & & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} = J_r.$$

Posons  $P = \text{Pass}(\mathcal{B}_1, \mathcal{C}_1)$  et  $Q = \text{Pass}(\mathcal{C}_2, \mathcal{B}_2)$ , alors :  $P \in GL_p(\mathbb{K})$ ,  $Q \in GL_n(\mathbb{K})$  et d'après les formules de changement de base :

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2}(f) = \text{Pass}(\mathcal{C}_2, \mathcal{B}_2) \text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f) \text{Pass}(\mathcal{B}_1, \mathcal{C}_1) = QJ_rP.$$



### Exercice 33 (Chapitre 20, exemple 13)

Soit  $f$  l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$ . Posons  $r = \text{rg}(f) = \text{rg}(A)$ .

On a :  $A^2 = 0_n$  donc :  $\forall x \in \mathbb{R}^n, f(f(x)) = 0$  donc  $\text{Im } f \subset \ker f$ .

Soit  $(e_1, e_3, \dots, e_{2r-1})$  une base de  $\text{Im } f$ .

Soit  $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$ , comme  $e_{2k-1} \in \text{Im } f$ , il existe  $e_{2k} \in \mathbb{R}^n$  tel que :  $e_{2k-1} = f(e_{2k})$ .

$(e_1, e_3, \dots, e_{2r-1})$  une base de  $\text{Im } f \subset \ker f$  ainsi  $(e_1, e_3, \dots, e_{2r-1})$  est une famille libre de  $r$  vecteurs de  $\ker f$ . Comme  $\dim \ker f = n - r$ , d'après le théorème de la base incomplète, il existe  $e_{2r+1}, \dots, e_n \in \mathbb{R}^n$  ( $n - 2r$  vecteurs) tels que  $(e_1, e_3, \dots, e_{2r-1}, e_{2r+1}, \dots, e_n)$  soit une base de  $\ker f$ .

Posons  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ . Montrons que  $\mathcal{B}$  est libre.

Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  tels que :  $\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k = 0$ .

On a :  $\sum_{k=1}^n \lambda_k f(e_k) = 0$  or  $(e_1, e_3, \dots, e_{2r-1}, e_{2r+1}, \dots, e_n)$  est une base de  $\ker f$  donc :

$$\lambda_2 f(e_2) + \dots + \lambda_{2r} f(e_{2r}) = 0.$$

Donc :

$$\lambda_2 e_1 + \dots + \lambda_{2r} e_{2r-1} = 0.$$

Or  $(e_1, e_3, \dots, e_{2r-1})$  est libre donc :

$$\lambda_2 = \dots = \lambda_{2r} = 0.$$

Ainsi :

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_{2r-1} e_{2r-1} + \lambda_{2r} e_{2r} + \dots + \lambda_n e_n = 0.$$

Or  $(e_1, e_3, \dots, e_{2r-1}, e_{2r+1}, \dots, e_n)$  est libre donc :

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_{2r-1} = \lambda_{2r} e_{2r} = \dots = e_n = 0.$$

Ainsi  $\mathcal{B}$  est libre.

Comme  $\text{Card } \mathcal{B} = n$ , alors  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathbb{R}^n$ .

Et comme,  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & 0 & \\ & & & & & 0 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$ , alors  $A$  est semblable à cette matrice.

