Correction de la séance **11**

Compléments sur les séries numériques

Exercice de calcul *(Chapitre 7, exemple 25)*
Soit $z \in \mathbb{C}$, posons $Z = z^3$, on a :

$$\begin{aligned} z^6 - 2iz^3 - 2 = 0 \Leftrightarrow Z^2 - 2iZ - 2 = 0 \Leftrightarrow Z = \frac{2i \pm \sqrt{4}}{2} \Leftrightarrow Z = i \pm 1 \Leftrightarrow Z = \sqrt{2}e^{i\pi/4} \text{ ou } Z = \sqrt{2}e^{3i\pi/4} \\ \Leftrightarrow z^3 = \sqrt{2}e^{i\pi/4} \text{ ou } z^3 = \sqrt{2}e^{3i\pi/4} \Leftrightarrow \left(\frac{z}{\sqrt[6]{2}e^{i\pi/12}}\right)^3 = 1 \text{ ou } \left(\frac{z}{\sqrt[6]{2}e^{i\pi/4}}\right)^3 = 1 \\ \Leftrightarrow \frac{z}{\sqrt[6]{2}e^{i\pi/12}} \in \mathbb{U}_3 = \{1, e^{2i\pi/3}, e^{4i\pi/3}\} \text{ ou } \frac{z}{\sqrt[6]{2}e^{i\pi/4}} \in \mathbb{U}_3 = \{1, e^{2i\pi/3}, e^{4i\pi/3}\} \\ \Leftrightarrow z \in \{\sqrt[6]{2}e^{i\pi/12}, \sqrt[6]{2}e^{3i\pi/4}, \sqrt[6]{2}e^{17i\pi/12}, \sqrt[6]{2}e^{i\pi/4}, \sqrt[6]{2}e^{11i\pi/12}, \sqrt[6]{2}e^{19i\pi/12}\} \end{aligned}$$

Inégalité
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [a, b]$.

$$\left|f_n(x)\right| \leq \frac{b^2}{1 + n^2a^2}$$

Posons : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{b^2}{1+n^2a^2}$, alors $u_n \sim \dfrac{b^2}{n^2a^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ converge donc (u_n) convient.

Exercice 23 *(Chapitre 26, exercice 8)*

1. (a) Supposons $l > 1$.
Soit $m \in]1, l[$. Comme $m < l$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq n_0 \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq m > 1.$$

Ainsi :

$$\forall n \geq n_0, u_{n+1} \geq u_n.$$

D'où :

$$\forall n \geq n_0,\ 0 < u_{n_0} \leq u_n$$

Donc, (u_n) ne converge pas vers 0 donc la série diverge grossièrement donc diverge.

(b) Supposons $l \in [0,1[$.
Soit $M \in]l,1[$. Comme $M > l$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq n_0 \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq M.$$

Donc :

$$\forall n \geq n_0,\ u_{n+1} \leq M u_n$$

Par récurrence, on montre alors que :

$$\forall n \geq n_0,\ 0 \leq u_n \leq M^{n-n_0} u_{n_0}$$

Or, $\sum M^n$ converge en tant que série géométrique de raison $M \in [0,1[$.
Ainsi, par théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ converge.

2. (a) (u_n) est bien suite de réels strictement positifs.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}(\sin\alpha)^{2n+2} n^2}{(n+1)^2 2^n (\sin\alpha)^{2n}} = 2(\sin\alpha)^2 \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2(\sin\alpha)^2.$$

- Si $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right[$, $\sin\alpha \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right[$ donc $2(\sin\alpha)^2 \in [0,1[$. Ainsi, par la règle de d'Alembert, $\sum u_n$ converge.
- Si $\alpha \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin\alpha \in \left]\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$ donc $2(\sin\alpha)^2 \in]1,2]$. Ainsi, par la règle de d'Alembert, $\sum u_n$ diverge.
- Si $\alpha = \frac{\pi}{4}$, la règle de d'Alembert ne s'applique pas.
  On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n^2}$. Ainsi $\sum u_n$ converge.

Finalement, $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{2}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{2}{\exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}.$$

Or, $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim 1$ Ainsi, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{e} < 1$.
Ainsi, par la règle de d'Alembert, $\sum u_n$ converge.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n!\ln(n+1)}{(n+1)!\ln n} = \frac{\ln(n+1)}{(n+1)\ln n}.$$

Or, $\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1 + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Ainsi, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Donc par la règle de d'Alembert, $\sum u_n$ converge.

(d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\ln(n+1)2^n}{2^{n+1}\ln(n)} = \frac{1}{2}\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}$$

Or, Or, $\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1 + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2} < 1$.
Donc par la règle de d'Alembert, $\sum u_n$ converge.

Exercice 24 *(Chapitre 26, exercice 25)*

1. (a)
- Soit $n \in \mathbb{N}$, $S_{2n+2} - S_{2n} = (-1)^{2n+2}u_{2n+2} - (-1)^{2n+1}u_{2n+1} = u_{2n+2} - u_{2n+1} \leq 0$ (car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante).
  Ainsi, $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
- De même, soit $n \in \mathbb{N}$, $S_{2n+3} - S_{2n+1} = (-1)^{2n+3}u_{2n+3} - (-1)^{2n+2}u_{2n+2} = -u_{2n+3} + u_{2n+2} \geq 0$ (car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante).
  Donc $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

- Enfin, soit $n \in \mathbb{N}$, $S_{2n+1} - S_{2n} = (-1)^{2n+1} u_{2n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

Ainsi, les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

(b) Comme les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, alors les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.
Ainsi, les suites extraites paires et impaires convergent vers la même limite donc $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge .
Ainsi, $\sum (-1)^n u_n$ converge.

2. (a)
- Si $\alpha \leq 0$, alors $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ diverge grossièrement.
- Si $\alpha > 1$, alors $\left|\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right| = \frac{1}{n^\alpha}$.
  Or $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ est une série de Riemann convergente.
  Ainsi $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge absolument donc converge.
- Si $0 \leq \alpha < 1$, alors, posons : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$. Alors (u_n) est une suite de réels strictement positifs, décroissante et convergeant vers 0, donc, d'après 1., $\sum (-1)^n u_n$ converge.
  Ainsi $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge.

(b)

$$\begin{aligned}
u_n &= (-1)^n \left(\exp\left(-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) - \frac{1}{e}\right)\\
&= (-1)^n \left(\exp\left(-n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right) - \frac{1}{e}\right)\\
&= (-1)^n \left(\exp\left(-1 + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \frac{1}{e}\right)\\
&= (-1)^n \left(\frac{1}{e}\exp\left(\frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \frac{1}{e}\right)\\
&= (-1)^n \left(\frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \frac{1}{e}\right)\\
&= \frac{(-1)^n}{2en} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, alors $\sum u_n$ et $\sum \dfrac{(-1)^n}{2en}$ ont même nature.
Comme $(\frac{1}{2en})$ est une suite de réels strictement positifs, décroissante et convergeant vers 0, donc, d'après 1., $\sum \dfrac{(-1)^n}{2en}$ converge.
Donc $\sum u_n$ converge.

(c)

$$\begin{aligned}
u_n &= \sin\left(\pi\frac{n^3+1}{n^2+1}\right)\\
&= \sin\left(\pi n \frac{1+\frac{1}{n^3}}{1+\frac{1}{n^2}}\right)\\
&= \sin\left(\pi n \left(1+\frac{1}{n^3}\right)\left(1 - \frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right)\\
&= \sin\left(\pi n \left(1 - \frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right)\\
&= \sin\left(\pi n - \frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\
&= (-1)^n \sin\left(-\frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\
&= (-1)^n \left(-\frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\
&= \frac{(-1)^{n+1}\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, alors $\sum u_n$ et $\sum \dfrac{(-1)^{n+1}\pi}{n}$ ont même nature.

Comme $(\frac{\pi}{n})$ est une suite de réels strictement positifs, décroissante et convergeant vers 0, donc, d'après 1., $\sum \dfrac{(-1)^{n+1}\pi}{n}$ converge.

Donc $\sum u_n$ converge.

(d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on effectue le changement de variable : $t = x - n\pi$. On a : $dt = dx$.

$$\begin{aligned} u_n &= \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x \ln x} dx \\ &= \int_0^{\pi} \frac{\sin(t+n\pi)}{(t+n\pi)\ln(t+n\pi)} dx \\ &= (-1)^n \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{(t+n\pi)\ln(t+n\pi)} dx \\ &= (-1)^n v_n \end{aligned}$$

avec : $v_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{(t+n\pi)\ln(t+n\pi)} dx$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $t \in [0\pi]$, alors $\sin(t) \geq 0$, $t + n\pi \geq 0$ et $\ln(t+n\pi) \geq 0$, ainsi, : $v_n \geq 0$.
  De plus, comme $t \mapsto \frac{\sin(t)}{(t+n\pi)\ln(t+n\pi)}$ est continue, positive et non constante nulle, alors $v_n > 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $t \in [0\pi]$, on a $\sin(t) \geq 0$, $0 < t + n\pi \leq t + (n+1)\pi$ et $0 < \ln(t+n\pi) \leq \ln(t+(n+1)\pi)$.
  Ainsi $\frac{\sin(t)}{(t+(n+1)\pi)\ln(t+(n+1)\pi)} \leq \frac{\sin(t)}{(t+n\pi)\ln(t+n\pi)}$.
  Donc, par croissance de l'intégrale, $v_{n+1} \leq v_n$.
  Ainsi (v_n) est décroissante.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} |v_n| &\leq \int_0^{\pi} \frac{1}{n\pi \ln(n\pi)} dt \\ &\leq \frac{1}{n \ln(n\pi)} \end{aligned}$$

  Donc $\lim v_n = 0$.

Donc, d'après 1., $\sum (-1)^n v_n$ converge.

Donc $\sum u_n$ converge.

Exercice 25 *(Chapitre 26, exemple 6)*

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

   La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue décroissante et positive.

   Par comparaison série-intégrale, on a donc :

$$\int_1^{n+1} \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \int_1^{n} \frac{dt}{t}$$

   D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \ln(n+1) \leq S_n \leq 1 + \ln n$$

   Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \leq \frac{S_n}{\ln n} \leq 1 + \frac{1}{\ln n}$$

   Or, $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1 + \dfrac{1}{\ln(n)} \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1$.

   De même, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{\ln n}\right) = 1$.

   Ainsi, par théorème d'encadrement, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{S_n}{\ln n} = 1$.

   Donc

$$S_n \sim \ln n.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   On a :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(n) \\
&= \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

   Ainsi, $u_{n+1} - u_n \sim -\frac{1}{2n^2}$.
   De plus, comme $2 > 1$, la série $\sum \frac{-1}{2n^2}$ est une série de Riemann convergente et de signe constant.
   Ainsi, $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge.
   Donc, comme il s'agit d'une série télescopique, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.
   Notons $\gamma \in \mathbb{R}$ sa limite.
   On obtient alors : $u_n = \gamma + o(1)$.
   Donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1).$$

Exercice 26 *(Chapitre 26, exemple 8)*

- **Si** $\alpha < 0$ **:** alors la série diverge grossièrement.
- **Si** $\alpha = 0$ **et** $\beta \leq 0$ **:** alors la série diverge grossièrement.

- **Si** $\alpha > 1$ **:** Posons $\gamma = \frac{1+\alpha}{2}$, on a alors $\gamma \in]1, \alpha[$.
  On a :

$$\frac{n^\gamma}{n^\alpha (\ln n)^\beta} = \frac{1}{n^{\alpha-\gamma}(\ln(n))^\beta} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

  par croissances comparées car $\alpha - \gamma > 0$.
  Donc, à partir d'un certain rang :

$$0 \leq \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \leq \frac{1}{n^\gamma}.$$

  Or, comme $\gamma > 1$, la série $\sum \frac{1}{n^\gamma}$ est une série de Riemann convergente.
  Par suite $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ converge.
- **Si** $\alpha < 1$ **:**
  Posons $\gamma = \frac{1+\alpha}{2}$, on a alors $\gamma \in]\alpha, 1[$.
  Or,

$$\frac{n^\gamma}{n^\alpha (\ln n)^\beta} = \frac{n^{\gamma-\alpha}}{(\ln(n))^\beta} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

par croissances comparées car $\gamma - \alpha > 0$.
Donc, à partir d'un certain rang :

$$0 \leq \frac{1}{n^\gamma} \leq \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}.$$

Or, comme $\gamma < 1$, la série $\sum \frac{1}{n^\gamma}$ est une série de Riemann divergente.

Par suite $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ diverge.

- **Si $\alpha = 1$:**
  - **Si $\beta < 0$:**
    On a :

    $$\frac{n}{n \ln(n)^\beta} = (\ln n)^{-\beta} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

    Donc, à partir d'un certain rang :

    $$0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n (\ln n)^\beta}.$$

    Or, la série $\sum \frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente.

    Par suite $\sum \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ diverge.
  - **Si $\beta \geq 0$:**
    La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t(\ln t)^\beta}$ est continue décroissante et positive sur $[2, +\infty[$.
    Ainsi, par comparaison série intégrale, on a :

    $$\sum \frac{1}{n(\ln n)^\beta} \text{ converge ssi } \left(\int_2^n \frac{1}{t(\ln t)^\beta} \right) \text{ converge.}$$

    Si $\beta \neq 1$:

    $$\forall n \geq 2, \int_2^n \frac{1}{t(\ln t)^\beta} dt = \left[\frac{1}{1-\beta} (\ln t)^{1-\beta} \right]_2^n = \frac{1}{1-\beta} \left(\frac{1}{(\ln(n))^{\beta-1}} - \frac{1}{(\ln(2))^{\beta-1}} \right).$$

    Si $\beta \neq 1$:

    $$\forall n \geq 2, \int_2^n \frac{1}{t(\ln t)^\beta} dt = [\ln(\ln t)]_2^n = \ln(\ln n) - \ln(\ln 2).$$

    Ainsi, on a :

    $$\lim_{n \to +\infty} \int_2^n \frac{1}{t(\ln t)^\beta} dt = \begin{cases} +\infty & \text{si } \beta < 1 \\ \frac{1}{1-\beta} \left(-\frac{1}{(\ln(2))^{\beta-1}} \right) & \text{si } \beta > 1 \\ +\infty & \text{si } \beta = 1 \end{cases}$$

    Donc :

    $$\sum \frac{1}{n(\ln n)^\beta} \begin{cases} \text{diverge} & \text{si } \beta < 1 \\ \text{converge} & \text{si } \beta > 1 \\ \text{diverge} & \text{si } \beta = 1 \end{cases}$$

En conclusion, $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou $\left(\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1\right)$.