Correction de la séance 10

Probabilités, espérance et variance

Exercice de calcul *(Chapitre 9, exemple 14)*

Soit y deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Posons $z : x \mapsto e^{x^2} y(x)$ alors z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et, soit $x \in \mathbb{R}$,

$$z'(x) = e^{x^2}(2xy(x) + y'(x)) \text{ et } z''(x) = e^{x^2}((4x^2+2)y(x) + 4xy'(x) + y''(x))$$

Ainsi :

$$y'' + 4xy' + (3+4x^2)y = 0 \Leftrightarrow z'' + z = 0.$$

L'équation caractéristique associée à $z'' + z = 0$ est $r^2 + 1 = 0$ qui a pour racines $\pm i$ donc les solutions de $z'' + z = 0$ sont : $z : x \mapsto \lambda \cos x + \mu \sin x$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Ainsi, les solutions de $y'' + 4xy' + (3+4x^2)y = 0$ sont :

$$x \mapsto \frac{\lambda \cos x + \mu \sin x}{e^{x^2}}, \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Inégalité

Soit $(x,t) \in [a, +\infty[\times \mathbb{R}^{+*}$, on a : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -e^{-xt} \sin t$. Donc :

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| \leq e^{-xt} \leq e^{-at}.$$

Posons $g : t \mapsto e^{-at}$ alors g convient.

Exercice 20 *(Chapitre 23, exemple 2)*

1. Comme $((X_i = 0), (X_i = 1))$ est un système complet d'événements, on a :

$$\begin{aligned}
P(X_{i+1} = 1) &= P(X_{i+1} = 1 | X_i = 0) P(X_i = 0) + P(X_{i+1} = 1 | X_i = 1) P(x_i = 1) \\
&= 1.P(X_i = 0) + \frac{1}{2} P(x_i = 1) \quad \text{par hypothèses} \\
&= 1 - P(X_i = 1) + \frac{1}{2} P(x_i = 1) \\
&= 1 - \frac{1}{2} P(x_i = 1)
\end{aligned}$$

2. Soit $l\in\mathbb{R}$, on a : $l=1-\frac{1}{2}l \Leftrightarrow l=\frac{2}{3}$ et, soit $i\in[\![1,364]\!]$,

$$P(X_{i+1}=1)-\frac{2}{3}=-\frac{1}{2}\left(P(X_i=1)-\frac{2}{3}\right).$$

   Ainsi :

$$P(X_i=1)-\frac{2}{3}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{i-1}\left(P(X_1=1)-\frac{2}{3}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^{i-1}\left(P(X_1=1)-\frac{2}{3}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^{i-1}\frac{1}{3}.$$

   Donc :

$$X_i\sim\mathcal{B}\left(\frac{2}{3}+(\left(-\frac{1}{2}\right)^{i-1}\frac{1}{3}\right)$$

3. On a : $X=\sum_{i=1}^{365}X_i$ donc :

$$\begin{aligned}E(X)&=\sum_{i=1}^{365}E(X_i)=\sum_{i=1}^{365}\left(\frac{2}{3}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{i-1}\times\frac{1}{3}\right)\\&=\frac{2}{3}.365+\frac{1}{3}\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{365}}{1-(-\frac{1}{2})}\\&=\frac{2}{3}.365+\frac{2}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^{365}\end{aligned}$$

Exercice 21 *(Chapitre 23, exemple 11)*

Posons $Y_n=\dfrac{X_1+\cdots+X_n}{n}$, on a $E(Y_n)=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}p_i$ donc, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P(|Y_n-E(Y_n)|\geq\varepsilon)\leq\frac{V(Y_n)}{\varepsilon^2}.$$

Ainsi :

$$1-\frac{V(Y_n)}{\varepsilon^2}\leq P(|Y_n-E(Y_n)|<\varepsilon)\leq 1.$$

De plus, comme $X_1,\ldots,X_n$ sont deux à deux indépendantes :

$$V(Y_n)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}V(X_i)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}p_i(1-p_i)\leq\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}1\leq\frac{1}{n}.$$

Donc :

$$1-\frac{1}{n\varepsilon^2}\leq P(|Y_n-E(Y_n)|<\varepsilon)\leq 1.$$

Ainsi, par théorème d'encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty}P\left(\left|\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}p_i\right|<\varepsilon\right)=1.$$

Exercice 22 *(Chapitre 23, exercice 6)*

1. Pour tout $i\in\mathbb{N}^*$, on note F_i l'événement : « Obtenir face au i-ème lancer. »

- $X_2(\Omega) = \{0, 1\}$.
  On a :

$$P(X_2 = 0) = P(F_2 \cap F_1) \cup (\overline{F_1} \cap \overline{F_2})) = P(F_2 \cap F_1) + P(\overline{F_2} \cap \overline{F_1}) = P(F_1)P(F_2) + P(\overline{F_1})P(\overline{F_2}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

  car les événements $F_1 \cap F_2$, $\overline{F_1} \cap \overline{F_2}$ sont incompatibles et les deux tirages sont indépendants.
  De plus $P(X_2 = 0) + P(X_2 = 1) = 1$, ainsi :

$$P(X_2 = 1) = \frac{1}{2}.$$

  X_2 suit donc la loi uniforme sur $\{0, 1\}$.
  On a :

$$E(X_2) = 0 \times P(X_2 = 0) + 1 \times P(X_2 = 1) = \frac{1}{2}.$$

$$V(X_2) = E(X_2^2) - E(X_2)^2 = 0^2 P(X_2 = 0) + 1^2 P(X_2 = 1) - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

- On a $X_3(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.
  On a :

$$\begin{aligned}
P(X_3 = 2) &= P((\overline{F_1} \cap F_2 \cap \overline{F_3}) \cup (F_1 \cap \overline{F_2} \cap F_3)) \\
&= P(\overline{F_1} \cap F_2 \cap \overline{F_3}) + P(F_1 \cap \overline{F_2} \cap F_3) \\
&= P(\overline{F_1})P(F_2)P(\overline{F_3})) + P(F_1)P(\overline{F_2})P(F_3) \\
&= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

  De même,

$$\begin{aligned}
P(X_3 = 0) &= P((F_1 \cap F_2 \cap F_3) \cup (\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap \overline{F_3})) \\
&= P(F_1 \cap F_2 \cap F_3) + P(\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap \overline{F_3}) \\
&= P(F_1)P(F_2)P(F_3) + P(\overline{F_1})P(\overline{F_2})P(\overline{F_3}) \\
&= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

  Enfin, $P(X_3 = 1) = 1 - P(X_3 = 0) - P(X_3 = 2) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.
  Par suite,

$$E(X_3) = 0 \times P(X_3 = 0) + 1 \times P(X_3 = 1) + 2 \times P(X_3 = 2) = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} = 1.$$

  Et :

$$V(X_3) = E(X_3^2) - E(X_3)^2 = 0^1 P(X_3 = 0) + 1^2 P(X_3 = 1) + 2^2 P(X_3 = 2) - 1 = \frac{1}{2} + \frac{4}{4} - 1 = \frac{1}{2}.$$

2. Soit $n \geq 2$, X_n représente le gain à la suite de $n-1$ parties. Ce gain est donc entre 0 et $n-1$. Ainsi, $X_n(\Omega) = [\![0, n-1]\!]$.
   On a :

$$\begin{aligned}
P(X_n = 0) &= P((F_1 \cap \cdots \cap F_n) \cup (\overline{F_1} \cap \ldots \overline{F_n})) \\
&= P(F_1 \cap \cdots \cap F_n) + P(\overline{F_1} \cap \cdots \cap \overline{F_n}) \quad \text{par incompatibilité} \\
&= P(F_1) \ldots P(F_n) + P(\overline{F_1}) \ldots P(\overline{F_n}) \quad \text{par indépendance des différents tirages} \\
&= \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} \\
&= \frac{1}{2^{n-1}}.
\end{aligned}$$

   On a :

$$P(X_n = n-1) = P((F_1 \cap \overline{F_2} \cap F_3 \ldots) \cup (\overline{F_1} \cap F_2 \cap \overline{F_3} \ldots)) = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

3. $(X_n = l)_{l\in[\![0,n-1]\!]}$ forme un système complet d'événements.
Ainsi, par la formule des probabilités totales, on a :

$$P(X_{n+1}=k)=\sum_{l=0}^{n-1}P(X_{n+1}=k|X_n=l)P(X_n=l)$$

On a $P(X_{n+1}=k|X_n=k)=\dfrac{1}{2}$ (puisqu'il faut faire au $(n+1)$-ième jet le même résultat que le jet précédent) et $P(X_{n+1}=k|X_n=k-1)=\dfrac{1}{2}$ (puisqu'il faut faire au $(n+1)$-ième jet le résultat opposé au jet précédent).
Si $l\in[\![1,n-1]\!]\setminus\{k,k-1\}$, $P(X_{n+1}=k|X_n=l)=0$. (car entre le n-ième et le $(n+1)$-ème lancer on ne peut que gagner 0 ou 1 point).
Ainsi, l'égalité devient :

$$P(X_{n+1}=k)=P(X_{n+1}=k|X_n=k-1)P(X_n=k-1)+P(X_{n+1}=k|X_n=k)P(X_n=k)=\frac{1}{2}P(X_n=k-1)+\frac{1}{2}P(X_n=k).$$

4. (a)
- On a $Q_n(1)=\sum_{k=0}^{n-1}P(X_n=k)=1$ (puisque $((X_n=k))_{\{}k\in[\![0,n-1]\!]\}$ forme un système complet d'événements).
- On a : $\forall s\in\mathbb{R}$, $Q_n'(s)=\sum_{k=1}^{n-1}kP(X_n=k)s^{k-1}$.
  Donc :
  $$Q_n'(1)=\sum_{k=1}^{n-1}kP(X_n=k)=\sum_{k=0}^{n-1}kP(X_n=k)=E(X_n).$$
- De plus : $\forall s\in\mathbb{R}$, $Q_n''(s)=\sum_{k=2}^{n-1}k(k-1)P(X_n=k)s^{k-1}$.
  Ainsi :
  $$Q_n''(1)=\sum_{k=2}^{n-1}k(k-1)P(X_n=k)=\sum_{k=0}^{n-1}k(k-1)P(X_n=k)=\sum_{k=0}^{n-1}k^2P(X_n=k)-\sum_{k=0}^{n-1}kP(X_n=k)=E(X_n^2)-E(X_n).$$
  Ainsi :
  $$V(X_n)=Q_n''(1)+E(X_n)-E(X_n)^2=Q_n''(1)+Q_n'(1)-Q_n'(1)^2.$$

(b) Soit $s\in\mathbb{R}$. On a, par les questions 2 et 3,

$$\begin{aligned}
Q_{n+1}(s)&=\sum_{k=0}^{n}P(X_{n+1}=k)s^k\\
&=P(X_{n+1}=0)s^0+P(X_{n+1}=n)s^n+\sum_{k=1}^{n-1}P(X_{n+1}=k)s^k\\
&=\frac{1}{2^n}+\frac{s^n}{2^n}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}(P(X_n=k)+P(X_n=k-1))s^k\\
&=\frac{1}{2}P(X_n=0)+\frac{1}{2}P(X_n=n-1)s^n+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}P(X_n=k)s^k+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-2}P(X_n=k)s^{k+1}\\
&=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}P(X_n=k)s^k+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}P(X_n=k)s^{k+1}\\
&=\frac{(1+s)}{2}Q_n(s)
\end{aligned}$$

(c) Soit $s\in\mathbb{R}$. On remarque alors que $(Q_n(s))_{n\in\geq 2}$ est géométrique.
Ainsi : $\forall n\geq 2,\ Q_n(s)=\left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-2}Q_2(s)$, avec $Q_2(s)=P(X_2=0)+P(X_2=1)s=\dfrac{1+s}{2}$ par la question 1.
Ainsi : $\forall s\in\mathbb{R}$, $\forall n\geq 2$, $Q_n(s)=\left(\dfrac{1+s}{2}\right)^{n-1}$.

(d) Soit $s\in\mathbb{R}$. On a :

$$Q_n'(s)=\frac{n-1}{2}\left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-2}\quad\text{et}\quad Q_n''(s)=\frac{(n-1)(n-2)}{4}\left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-3}.$$

On a alors :

$$E(X_n)=Q_n'(1)=\frac{n-1}{2}.$$

Et :

$$V(X_n) = Q_n''(1) + Q_n'(1) - Q_n'(1)^2 = \frac{(n-1)(n-2)}{4} + \frac{n-1}{2} - \frac{(n-1)^2}{4} = \frac{n-1}{4}(n-2+2-n+1) = \frac{n-1}{4}.$$