

Révisions d'algèbre linéaire 4 :

Pour aller vers la spé

On considère que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E, F, G, H sont des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et $n, p \in \mathbb{N}^*$.

I Rappels de cours

Proposition : Formule du binôme de Newton (*chapitre 19, proposition 16*)

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$, soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$(f + g)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k},$$

où $(f + g)^n = (f + g) \circ \dots \circ (f + g)$.

Corollaire (*chapitre 19, corollaire 3*)

Supposons E de dimension finie. Alors :

$$f \in GL(E) \text{ ssi } f \text{ injectif ssi } f \text{ surjectif.}$$

Proposition (*chapitre 19, proposition 24*)

Supposons E de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

- S'il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ v = Id_E$, alors $u \in GL(E)$ et $u^{-1} = v$.
- S'il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $v \circ u = Id_E$, alors $u \in GL(E)$ et $u^{-1} = v$.

Proposition (*chapitre 20, proposition 12*)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a les équivalences suivantes :

$$A \in GL_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \text{Ker}(A) = \{0\} \Leftrightarrow \text{Im}(A) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \text{rg}(A) = n.$$

Proposition (*chapitre 24, proposition 10*)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

$$A \in GL_n(\mathbb{K}) \iff \det(A) \neq 0.$$

De plus, dans ce cas $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Corollaire (*chapitre 24, corollaire 5*)

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $P \in GL_n(\mathbb{K})$. On a :

$$\det(P^{-1}AP) = \det(A)$$

II Exercices

2.1 Exercices d'entraînement

Exercice 1 :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ avec $\alpha \neq \beta$. Montrer que :

$$E = \text{Im}(f - \alpha \text{Id}_E) + \text{Im}(f - \beta \text{Id}_E).$$

Exercice 2 :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. On suppose que :

$$(f - \alpha \text{Id}_E) \circ (f - \beta \text{Id}_E) = 0.$$

- (a) Montrer que si $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$, alors $f \in GL(E)$ et exprimer f^{-1} en fonction de f et de Id_E .
(b) Montrer que si $f \in GL(E)$ et si f n'est pas une homothétie, alors $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$.
- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n, b_n \in \mathbb{K}$ tels que :

$$f^n = a_n f + b_n \text{Id}_E.$$

Exercice 3 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ avec $\alpha \neq \beta$. On suppose que :

$$(A - \alpha I_n)(A - \beta I_n) = 0.$$

- Montrer que $\det(\alpha I_n - A) = 0$ et $\det(\beta I_n - A) = 0$.
- Montrer que :

$$\ker(A - \alpha I_n) \oplus \ker(A - \beta I_n) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}).$$

- Soit $X \in \ker(A - \alpha I_n)$. Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, A^k X = \alpha^k X.$$

- Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à A .
Soient $\mathcal{B}_1$ une base de $\ker(f - \alpha \text{Id}_{\mathbb{K}^n})$ et $\mathcal{B}_2$ une base de $\ker(f - \beta \text{Id}_{\mathbb{K}^n})$. Posons $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$.
 - Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{K}^n$.
 - Ecrire $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
 - Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ matrice diagonale telle que :

$$A = PDP^{-1}.$$

- Montrer qu'il existe $B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, A^k = \alpha^k B + \beta^k C.$$

2.2 Exercices d'application

Exercice 4 :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ avec $\alpha \neq \beta$. On suppose que :

$$(f - \alpha \text{Id}_E) \circ (f - \beta \text{Id}_E) = 0.$$

- (a) Montrer que :

$$\ker(f - \alpha \text{Id}_E) \oplus \ker(f - \beta \text{Id}_E) = E.$$

- (b) Soit $x \in E$. Déterminer la valeur de $(x_1, x_2) \in \ker(f - \alpha \text{Id}_E) \times \ker(f - \beta \text{Id}_E)$ tel que :

$$x = x_1 + x_2.$$

- Soit p la projection sur $\ker(f - \alpha \text{Id}_E)$ parallèlement à $\ker(f - \beta \text{Id}_E)$ et soit q la projection sur $\ker(f - \beta \text{Id}_E)$ parallèlement à $\ker(f - \alpha \text{Id}_E)$.
 - Exprimer q en fonction de p . Simplifier $p \circ q$ et $q \circ p$.
 - Exprimer p puis q en fonction de f et Id_E .
 - Exprimer f en fonction de p et q .
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer f^n en fonction de p et q .

Exercice 5 :

1. Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $x \mapsto \det(xI_4 - A)$ est une fonction polynômiale de degré 4, unitaire.

Dans la suite de l'exercice, on admettra que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la fonction $x \mapsto \det(xI_n - A)$ est une fonction polynômiale de degré n , unitaire.

Le polynôme associé à cette fonction polynômiale est appelé le polynôme caractéristique de A et est noté χ_A .

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrer que :

$$\chi_A(\lambda) = 0 \iff \ker(A - \lambda I_n) \neq \{0\}.$$

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. On suppose que A et D sont semblable.

(a) Montrer que : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \chi_A(\lambda_i) = 0$.

(b) Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à A .

Montrer qu'il existe $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de $\mathbb{K}^n$ telle que : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(e_i) = \lambda_i e_i$.

(c) Montrer que : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \text{Vect}(e_i) \subset \ker(f - \lambda_i \text{Id}_{\mathbb{K}^n})$.

III Correction des exercices d'application

Exercice 4 :

1. (a)

On repère une question classique.

- Soit $x \in \ker(f - \alpha \text{Id}_E) \cap \ker(f - \beta \text{Id}_E)$. Alors, $(f - \alpha \text{Id}_E)(x) = 0$ donc $f(x) - \alpha x = 0$ ainsi $f(x) = \alpha x$. De même, $f(x) = \beta x$.

Ainsi $f(x) = \alpha x = \beta x$ donc $(\alpha - \beta)x = 0$. Or $\alpha \neq \beta$ donc $x = 0$. Ainsi :

$$\ker(f - \alpha \text{Id}_E) \cap \ker(f - \beta \text{Id}_E) = \{0\}.$$

- Soit $x \in E$. On a : $(f - \alpha \text{Id}_E) \circ (f - \beta \text{Id}_E)(x) = 0$ donc $(f - \beta \text{Id}_E)(x) = f(x) - \beta x \in \ker(f - \alpha \text{Id}_E)$.

De même, comme $(f - \beta \text{Id}_E) \circ (f - \alpha \text{Id}_E) = (f - \alpha \text{Id}_E) \circ (f - \beta \text{Id}_E) = 0$, on a : $f(x) - \alpha x \in \ker(f - \beta \text{Id}_E)$.

De plus : $(f(x) - \beta x) - (f(x) - \alpha x) = (\alpha - \beta)x$.

Comme $\alpha \neq \beta$, posons : $x_1 = \frac{1}{\alpha - \beta}(f(x) - \beta x)$ et $x_2 = -\frac{1}{\alpha - \beta}(f(x) - \alpha x)$. On a alors $x_1 \in \ker(f - \alpha \text{Id}_E)$, $x_2 \in \ker(f - \beta \text{Id}_E)$ et :

$$x = x_1 + x_2.$$

Donc $x \in \ker(f - \alpha \text{Id}_E) + \ker(f - \beta \text{Id}_E)$.

Ainsi :

$$\ker(f - \alpha \text{Id}_E) + \ker(f - \beta \text{Id}_E) = E.$$

- On a donc :

$$\ker(f - \alpha \text{Id}_E) \oplus \ker(f - \beta \text{Id}_E) = E.$$

- (b) D'après la question précédente :

$$x_1 = \frac{1}{\alpha - \beta}(f(x) - \beta x) \text{ et } x_2 = -\frac{1}{\alpha - \beta}(f(x) - \alpha x).$$

2. (a) On sait que $p + q = \text{Id}_E$ donc $q = \text{Id}_E - p$.

D'après le cours : $p \circ q = q \circ p = 0$.

- (b) Soit $x \in E$. Posons $x_1 = \frac{1}{\alpha - \beta}(f(x) - \beta x) \in \ker(f - \alpha \text{Id}_E)$ et $x_2 = -\frac{1}{\alpha - \beta}(f(x) - \alpha x) \in \ker(f - \beta \text{Id}_E)$. On a $x = x_1 + x_2$.
Donc :

$$p(x) = p(x_1) + p(x_2) = x_1 + 0 = x_1 = \frac{1}{\alpha - \beta}(f(x) - \beta x) \text{ et } q(x) = q(x_1) + q(x_2) = 0 + x_2 = -\frac{1}{\alpha - \beta}(f(x) - \alpha x).$$

Ainsi :

$$p = \frac{1}{\alpha - \beta}(f - \beta \text{Id}_E) \text{ et } q = -\frac{1}{\alpha - \beta}(f - \alpha \text{Id}_E).$$

- (c)

Il faut éliminer l'identité dans les relations précédentes pour avoir uniquement f .

On remarque que :

$$\alpha p + \beta q = \frac{1}{\alpha - \beta}(\alpha f - \alpha \beta Id_E) - \frac{1}{\alpha - \beta}(\beta f - \beta \alpha Id_E) = \frac{1}{\alpha - \beta}(\alpha f - \beta f) = f.$$

Ainsi :

$$f = \alpha p + \beta q.$$

3. On a $p \circ q = q \circ p$ donc, d'après la formule du binôme de Newton :

$$f^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\alpha p)^k \circ (\beta q)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \alpha^k \beta^{n-k} p^k \circ q^{n-k}.$$

Or, si $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ alors, comme $k-1 \geq 0$ et $n-k-1 \geq 0$ et $p \circ q = 0$:

$$p^k \circ q^{n-k} = p^{k-1} \circ p \circ q \circ q^{n-k-1} = p^{k-1} \circ 0 \circ q^{n-k-1} = 0.$$

Donc :

$$f^n = \beta^n q^n + \alpha^n p^n.$$

Or $p^2 = p$ donc $p^n = p$ car $n \geq 1$ et, de même, $q^n = q$. Ainsi :

$$f^n = \alpha^n p + \beta^n q.$$

Exercice 5 :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\det(xI_4 - A) = \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 & -2 \\ -3 & x & -1 & 1 \\ -1 & -1 & x & 2 \\ 0 & 0 & 1 & x-1 \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la dernière ligne :

$$\begin{aligned} \det(xI_4 - A) &= - \begin{vmatrix} x-1 & 0 & -2 \\ -3 & x & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} + (x-1) \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 \\ -3 & x & -1 \\ -1 & -1 & x \end{vmatrix} \\ &= -(2x(x-1) - 6 - 2x + (x-1)) + (x-1)^2 (x^2 - 1) \end{aligned}$$

Ainsi $x \mapsto \det(xI_4 - A)$ est une fonction polynômiale de degré 4, unitaire.

2.

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) = 0 &\iff \det(\lambda I_n - A) = 0 \\ &\iff \lambda I_n - A \notin GL_n(\mathbb{K}) \\ &\iff A - \lambda I_n \notin GL_n(\mathbb{K}) \\ &\iff \ker(A - \lambda I_n) \neq \{0\}. \end{aligned}$$

3. (a) Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Comme A et D sont semblables, il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $A = PDP^{-1}$ ainsi :

$$\chi_A(\lambda_i) = \det(\lambda_i I_n - A) = \det(\lambda_i I_n - PDP^{-1}) = \det(\lambda_i P I_n P^{-1} - PDP^{-1}) = \det(P(\lambda_i I_n - D)P^{-1}) = \det(\lambda_i I_n - D).$$

Or $\lambda_i I_n - D$ est une matrice diagonale donc le i -ème terme est $\lambda_i - \lambda_i = 0$ donc $\lambda_i I_n - D \notin GL_n(\mathbb{K})$. Ainsi :

$$\chi_A(\lambda_i) = 0.$$

(b) Comme A et D sont semblables, il existe $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de $\mathbb{K}^n$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = D$. On a donc :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(e_i) = \lambda_i e_i.$$

(c) Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a : $f(e_i) - \lambda_i e_i = 0$ donc $e_i \in \ker(f - \lambda_i Id_{\mathbb{K}^n})$ et comme $\ker(f - \lambda_i Id_{\mathbb{K}^n})$ est un espace vectoriel :

$$\text{Vect}(e_i) \subset \ker(f - \lambda_i Id_{\mathbb{K}^n}).$$