

Révisions d'algèbre linéaire 3 : Projections

On considère que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E, F, G, H sont des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et $n, p \in \mathbb{N}^*$.

I Rappels de cours

Théorème (chapitre 19, théorème 1)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires. Pour tout $(u_1, u_2) \in \mathcal{L}(E_1, F) \times \mathcal{L}(E_2, F)$, il existe une unique application u linéaire de E dans F telle que $u|_{E_1} = u_1$ et $u|_{E_2} = u_2$. Autrement dit, une application linéaire est entièrement déterminée par ses restrictions à deux espaces supplémentaires.

Définition (chapitre 19, définition 6)

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, et F et G deux sous-espaces supplémentaires dans E . On appelle projecteur ou projection sur F parallèlement à G , l'unique endomorphisme $p \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$\forall x \in F, p(x) = x \quad \text{et} \quad \forall x \in G, p(x) = 0$$

Proposition (chapitre 19, proposition 17)

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

$$p \text{ est un projecteur si et seulement si } p \circ p = p$$

Dans ce cas, on a $E = \text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p)$ et p est la projection sur $\text{Im}(p)$ parallèlement à $\text{Ker}(p)$.

Remarque : Soit $x \in E$. On a : $x \in \text{Im}(p) \Leftrightarrow p(x) = x$.

Proposition (chapitre 19, proposition 18)

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E .

Si p est le projecteur sur F parallèlement à G et q le projecteur sur G parallèlement à F alors :

- $p + q = \text{Id}_E$
- $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

II Exercices

2.1 Exercices d'entraînement

Exercice 1 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Montrer que $Id_E - f$ est un projecteur ssi f est un projecteur.

Exercice 2 : Soient p et q des projecteurs tels que $p \neq 0$, $q \neq 0$ et $p \neq q$.

Montrer que la famille (p, q) est libre.

Exercice 3 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A$ et $\text{rg}(A) = 2$. Montrer que A est semblable à :

$$\text{diag}(1, 1, 0, \dots, 0).$$

Exercice 4 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur.

Montrer que u et p commutent ssi $\text{Im}(p)$ et $\text{ker}(p)$ sont stables par u .

2.2 Exercices d'application

Exercice 5 :

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On appelle trace de A et on note $\text{tr}(A)$ le réel :

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}.$$

1. Montrer que : $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension n . Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ des bases de E . Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

2. Montrer que : $\text{tr}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) = \text{tr}(\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f))$.

Ainsi $\text{tr}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$ ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$. On appelle alors trace de f et on note $\text{tr}(f)$ le réel :

$$\text{tr}(f) = \text{tr}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)),$$

où $\mathcal{B}$ est une base de E .

3. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ une projection.

Montrer que : $\text{tr}(p) = \text{rg}(p)$.

Exercice 6 :

Soit $u: \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$
 $P \mapsto \frac{1}{2}(P(X) + P(-X)) + \frac{X}{2}(P(X) - P(-X))$.

Montrer que :

$$\text{ker}(u) \oplus \text{Im}(u) = \mathbb{R}[X].$$

III Correction des exercices d'application

Exercice 5 :

1. Soient $A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Posons $AB = (c_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $BA = (d_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soient $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a :

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \text{ et } d_{i,j} = \sum_{k=1}^n b_{i,k} a_{k,j}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \text{tr}(AB) &= \sum_{i=1}^n c_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,i} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n b_{k,i} a_{i,k} \\ &= \sum_{k=1}^n d_{k,k} = \text{tr}(BA). \end{aligned}$$

2. Posons $P = \text{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$. On a : $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = P \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) P^{-1}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \text{tr}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) &= \text{tr}((P \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) P^{-1})) \\ &= \text{tr}(P^{-1}(P \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f))) \text{ d'après la question précédente,} \\ &= \text{tr}(P^{-1} P \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)) = \text{tr}(\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)) \end{aligned}$$

3. Posons $r = \text{rg}(p)$.

Pour calculer la trace de p , il faut choisir une base dans laquelle écrire sa matrice. On cherche une base donnant la matrice la plus simple possible.

Comme $\dim(\text{Im}(p)) = \text{rg}(p) = r$, soit $(e_1, \dots, e_r)$ une base de $\text{Im}(p)$.

D'après le théorème du rang, $\dim(\ker(p)) = n - r$, soit $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ une base de $\ker(p)$.

Comme p est une projection, $\text{Im}(p) \oplus \ker(p) = E$ donc $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E .

Ainsi $\text{tr}(p) = \text{tr}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p))$.

Or : $\forall j \in \llbracket 1, r \rrbracket, p(e_j) = e_j$ (car $e_j \in \text{Im}(p)$) et $\forall j \in \llbracket r+1, n \rrbracket, p(e_j) = 0$ (car $e_j \in \ker(p)$).

Ainsi :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_r, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-r}).$$

Donc :

$$\text{tr}(M) = \underbrace{1 + \dots + 1}_r + \underbrace{0 + \dots + 0}_{n-r} = r = \text{rg}(p).$$

Exercice 6 :

Le calcul de $\ker(u)$ et de $\text{Im}(u)$ n'est pas évident. On ne peut pas utiliser le théorème du rang car $\mathbb{R}[X]$ est de dimension infinie. Si jamais u est une projection, on aura le résultat.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$u \circ u(P) = \frac{1}{2}(u(P)(X) + u(P)(-X)) + \frac{X}{2}(u(P)(X) - u(P)(-X))$$

Or, $u(P)(-X) = \frac{1}{2}(P(-X) + P(X)) + \frac{-X}{2}(P(-X) - P(X)) = \frac{1}{2}(P(-X) + P(X)) + \frac{X}{2}(-P(-X) + P(X)) = u(P)(X)$ donc :

$$\begin{aligned} u \circ u(P) &= \frac{1}{2}(u(P)(X) + u(P)(X)) + \frac{X}{2}(u(P)(X) - u(P)(X)) \\ &= u(P)(X) = u(P). \end{aligned}$$

Donc $u \circ u = u$. Ainsi u est une projection donc :

$$\ker(u) \oplus \text{Im}(u) = \mathbb{R}[X].$$