

Révisions d'algèbre linéaire 2 : Utilisation de bases et de matrices

On considère que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E, F, G, H sont des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et $n, p \in \mathbb{N}^*$.

I Rappels de cours

Théorème (chapitre 19, théorème 2)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels avec $\dim(E) = n$.

Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , $(f_1, \dots, f_n)$ une famille de vecteurs de F , il existe une unique application linéaire $u : E \rightarrow F$ telle que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $u(e_i) = f_i$.

Autrement dit, une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base. De plus :

- u est injective ssi $(f_1, \dots, f_n)$ est libre.
- u est surjective ssi $(f_1, \dots, f_n)$ est génératrice de F .
- u est bijective ssi $(f_1, \dots, f_n)$ est une base de F

Définition (chapitre 20, définition 3)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finies.

Soit $p = \dim E$ et $n = \dim F$.

Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F .

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

Soit $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, soient $(m_{1,j}, \dots, m_{n,j})$ les coordonnées de $u(e_j)$ dans $\mathcal{C}$, c'est-à-dire : $u(e_j) = \sum_{i=1}^n m_{i,j} f_i$.

On appelle matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, et on note $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ définie par :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u) = (m_{i,j})_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket, j \in \llbracket 1, p \rrbracket} = \begin{pmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,j} & \dots & m_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{i,1} & \dots & m_{i,j} & \dots & m_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & \dots & m_{n,j} & \dots & m_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

Dans le cas où $E = F$ et $\mathcal{B} = \mathcal{C}$, on appelle matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ et on note $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ la matrice :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(u) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Corollaire (chapitre 20, corollaire 3)

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n muni d'une base $\mathcal{B}$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

$$u \in GL(E) \iff \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in GL_n(\mathbb{K}).$$

On a alors $(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u))^{-1} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u^{-1})$.

Corollaire : Effet d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme (chapitre 20, corollaire 6)

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E . Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

On a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = \text{Pass}(\mathcal{B}', \mathcal{B}) \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \text{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = \text{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')^{-1} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \text{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}').$$

II Exercices

2.1 Exercices d'entraînement

Exercice 1 : On pose $E = \mathbb{R}^3$, $u = (1, 0, 0)$ et $v = (1, 1, 1)$.
Montrer qu'il existe $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\ker(f) = \text{Vect}(u, v)$.

Exercice 2 : On pose :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à A . On pose : $e_1 = (1, 1, 0)$, $e_2 = (-1, 1, 1)$ et $e_3 = (0, 1, 1)$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
3. Sans aucun supplémentaire, déterminer $\ker(f)$, $\text{Im}(f)$ et $\text{rg}(f)$. A-t-on $f \in GL(\mathbb{R}^3)$?

Exercice 3 : On pose :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

En utilisant des applications linéaires, calculer $M.M^T$ et $M^T.M$.

Exercice 4 : On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer qu'il existe $P \in GL_3(\mathbb{R})$, que l'on déterminera, tel que :

$$A = PDP^{-1}.$$

2.2 Exercices d'application

Exercice 5 : Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = -Id_2$.

1. Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à M . Montrer que f est bijectif et déterminer f^{-1} .
2. Montrer qu'il existe $P \in GL_2(\mathbb{R})$ tel que :

$$M = P \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Exercice 6 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_n[X] &\mapsto \mathbb{R}_n[X] \\ P &\mapsto P(X+1) - P(X). \end{aligned}$$

On note $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

1. (a) Déterminer $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
(b) A-t-on $f \in GL(\mathbb{R}_n[X])$?
2. (a) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que $\deg(f(P)) \leq \deg(P) - 1$.
(b) En déduire que : $\forall k \in \mathbb{N}, \forall P \in \mathbb{R}_n[X], \deg(f^k(P)) \leq \deg(P) - k$.
3. Sans calculs, montrer que :

$$A^{n+1} = 0.$$

III Correction des exercices d'application

Exercice 5 :

1. On a $M^2 = -Id_2$ donc $f \circ f = -Id_{\mathbb{R}^2}$.

Ainsi : $f \circ (-f) = Id_{\mathbb{R}^2}$.

Donc f est bijectif et $f^{-1} = -f$.

2.

On cherche $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ base de $\mathbb{R}^2$ telle que $f(e_1) = e_2$ et $f(e_2) = -e_1$.

On remarque que si $f(e_1) = e_2$ alors $f(e_2) = f \circ f(e_1) = -e_1$. Ainsi, il suffit d'avoir $f(e_1) = e_2$.

On prendra juste e_1 non nul (pour pouvoir débiter la base) et $e_2 = f(e_1)$ et on montrera que (e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^2$.

- Soit $e_1 \in \mathbb{R}^2$ tel que $e_1 \neq (0, 0)$.

Posons $e_2 = f(e_1)$.

- Montrons que (e_1, e_2) est libre.

Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = (0, 0)$.

On a alors : $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 f(e_1) = (0, 0)$ (1).

De plus, en appliquant f : $\lambda_1 f(e_1) + \lambda_2 f \circ f(e_1) = f(0, 0)$. Donc $\lambda_1 f(e_1) - \lambda_2 e_1 = (0, 0)$ (2).

Ainsi, en faisant $\lambda_1(1) - \lambda_2(2)$ (pour éliminer $f(e_1)$), on a : $\lambda_1^2 e_1 + \lambda_2^2 e_1 = (0, 0)$ donc $(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)e_1 = (0, 0)$.

Or $e_1 \neq (0, 0)$ donc $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 0$.

De plus, $\lambda_1^2, \lambda_2^2 \geq 0$, donc : $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Ainsi (e_1, e_2) est libre.

- Comme $\text{Card}(e_1, e_2) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$, alors $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

- Comme $f(e_1) = e_2$, on a $f(e_2) = f \circ f(e_1) = -e_1$ donc $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Soit $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On a $M = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$.

- Posons $P = \text{Pass}(\mathcal{C}, \mathcal{B})$.

On a $P \in GL_2(\mathbb{R})$ et, par formule de changement de bases : $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \text{Pass}(\mathcal{C}, \mathcal{B}) \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \text{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$. Ainsi :

$$M = P \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Exercice 6 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}_n[X] &\mapsto \mathbb{R}_n[X] \\ P &\mapsto P(X+1) - P(X). \end{aligned}$$

On note $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

1. (a) On a $\mathcal{B} = (X^{j-1})_{j \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket}$. Soit $j \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$. On a :

$$\begin{aligned} f(X^{j-1}) &= (X+1)^{j-1} - X^{j-1} = \sum_{k=0}^{j-1} \binom{j-1}{k} X^k - X^{j-1} = \sum_{i=k+1}^j \binom{j-1}{i-1} X^{i-1} - X^{j-1} \\ &= \sum_{i=1}^{j-1} \binom{j-1}{i-1} X^{i-1} + X^{j-1} - X^{j-1} = \sum_{i=1}^{j-1} \binom{j-1}{i-1} X^{i-1}. \end{aligned}$$

Posons $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$. Alors A est l'unique matrice telle que :

$$\forall j \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket, f(X^{j-1}) = \sum_{i=1}^{n+1} a_{i,j} X^{i-1}.$$

Ainsi :

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket, a_{i,j} = \begin{cases} \binom{j-1}{i-1} & \text{si } i \leq j-1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- (b) La matrice A est triangulaire supérieure et sa diagonale est nulle, ainsi $A \notin GL_{n+1}(\mathbb{R})$.

Donc $f \notin GL(\mathbb{R}_n[X])$.

2. (a) • Si $P = 0$, $f(P) = 0$ donc $\deg(f(P)) \leq \deg(P) - 1$.
 • Si $P \neq 0$, posons $p = \deg(P) \in \mathbb{N}$ et soit a_p le coefficient dominant de P .
 Par opération sur les degrés, $\deg(P(X+1) - P(X)) \leq \deg(P)$.
 De plus, le coefficient de X^p dans $P(X+1) - P(X)$ est $a_p - a_p = 0$ donc $\deg(P(X+1) - P(X)) \leq \deg(P) - 1$.
 Ainsi : $\deg(f(P)) \leq \deg(P) - 1$.

- Dans tous les cas :

$$\deg(f(P)) \leq \deg(P) - 1.$$

- (b) • Pour $k = 0$, soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

Comme $f^k = Id_{\mathbb{R}_n[X]}$, on a : $\deg(f^k(P)) = \deg(P) \leq \deg(P) - 0$.

- Soit $k \in \mathbb{N}$, supposons que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \deg(f^k(P)) \leq \deg(P) - k$.

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, par hypothèse de récurrence : $\deg(f^{k+1}(P)) = \deg(f^k(f(P))) \leq \deg(f(P)) - k$.

Donc, d'après la question précédente : $\deg(f^{k+1}(P)) \leq \deg(P) - 1 - k$.

- Ainsi, par récurrence :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall P \in \mathbb{R}_n[X], \deg(f^k(P)) \leq \deg(P) - k.$$

3. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On a $\deg(f^{n+1}(P)) \leq \deg(P) - (n+1) \leq n - (n+1) \leq -1$. Donc $\deg(f^{n+1}(P)) = -\infty$.

Ainsi $f^{n+1}(P) = 0$ donc $f^{n+1} = 0$.

D'où :

$$A^{n+1} = 0.$$