Révisions d'algèbre linéaire 1 :
Avec des noyaux et des images

On considère que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E, F, G, H sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $n, p \in \mathbb{N}^*$.

I Rappels de cours

Définition ***(chapitre 19, définition 3)***

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle

- image de u et on note $\operatorname{Im} u$ l'ensemble $\operatorname{Im} u = u(E) = \{u(x), x \in E\} = \{y \in F, \exists x \in E, y = u(x)\}$.
  Soit $y \in F$,
  $$y \in \operatorname{Im}(u) \Leftrightarrow \exists x \in E, y = u(x).$$
- noyau de u et on note $\operatorname{Ker}(u)$ l'ensemble $\operatorname{Ker}(u) = u^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E \mid u(x) = 0\}$.
  Soit $x \in E$,
  $$x \in \operatorname{Ker}(u) \Leftrightarrow u(x) = 0_F$$

Proposition ***(chapitre 19, proposition 9)***

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.
u est injective si et seulement si $\operatorname{Ker} u = \{0\}$.

Proposition ***(chapitre 19, proposition 10)***

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.
u est surjective si et seulement si $\operatorname{Im}(u) = F$.

Proposition ***(chapitre 17, proposition 26)***

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Alors

- F est de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$
- $\dim E = \dim F$ si et seulement si $F = E$.

Proposition ***(chapitre 17, proposition 29)***

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous espaces vectoriels de E. Alors, les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $E = F \oplus G$

(ii) $F \cap G = \{0\}$ et $\dim E = \dim F + \dim G$

(iii) $F + G = E$ et $\dim E = \dim F + \dim G$

Théorème du rang ***(chapitre 19, théorème 4)***

Supposons E de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

$$\dim(E) = \dim(\operatorname{Ker} u) + \operatorname{rg}(u)$$

II Exercices

2.1 Exercices d'entraînement

Exercice 1 : Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$. Montrer que :

$$g \circ f = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{Im}\,(f) \subset \ker(g).$$

Exercice 2 : Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que :

1. $\ker(f) \cap \ker(g) \subset \ker(f+g)$,
2. $\mathrm{Im}\,(f+g) \subset \mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Im}\,(g)$,
3. $\ker(f) \subset \ker(f^2)$,
4. $\mathrm{Im}\,(f^2) \subset \mathrm{Im}\,(f)$.

Exercice 3 : Supposons E de dimension finie. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que :

$$\mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Im}\,(g) = \ker(f) + \ker(g) = E.$$

Montrer que ce sommes sont directes.

Exercice 4 : Supposons E de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $E = \mathrm{Im}\,(f) \oplus \ker(f)$,
(ii) $E = \mathrm{Im}\,(f) + \ker(f)$,
(iii) $\mathrm{Im}\,(f^2) = \mathrm{Im}\,(f)$,
(iv) $\ker(f^2) = \ker(f)$.

2.2 Exercices d'application

Exercice 5 : Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que :

$$\ker(g \circ f) = \ker(f) \Longleftrightarrow \mathrm{Im}\,(f) \cap \ker(g) = \{0_E\}.$$

Exercice 6 : Soient $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$. On pose $w = v \circ u$.

1. On suppose que w est un isomorphisme.
   (a) Montrer que u est injectif.
   (b) Montrer que v est surjectif.
   (c) Montrer que $\mathrm{Im}\,(u) \oplus \ker(v) = F$.
2. Réciproquement, on suppose que u est injectif, v est surjectif et $\mathrm{Im}\,(u) \oplus \ker(v) = F$.
   Montrer que w est un isomorphisme.

III Correction des exercices d'application

Exercice 5 :

- Supposons que $\ker(g \circ f) = \ker(f)$.
  Soit $y \in \mathrm{Im}(f) \cap \ker(g)$. Alors, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ et on a $g(y) = 0_E$.
  Ainsi, $g(f(x)) = 0_E$ donc $x \in \ker(g \circ f)$.
  Or $\ker(g \circ f) = \ker(f)$, donc $x \in \ker(f)$. Ainsi $f(x) = 0_E$, or $y = f(x)$, donc $y = 0_E$.
  On a donc : $\mathrm{Im}(f) \cap \ker(g) \subset \{0_E\}$.
  Comme $\{0_E\} \subset \mathrm{Im}(f) \cap \ker(g)$, on a :
  $$\mathrm{Im}(f) \cap \ker(g) = \{0_E\}.$$
- Supposons $\mathrm{Im}(f) \cap \ker(g) = \{0_E\}$.
  - Soit $x \in \ker(f)$. On a : $f(x) = 0_E$.
    Ainsi : $g \circ f(x) = g(0_E) = 0_E$. Donc : $x \in \ker(g \circ f)$.
    D'où : $\ker(f) \subset \ker(g \circ f)$.
  - Soit $x \in \ker(g \circ f)$. On a $g \circ f(x) = 0_E$.
    Donc $g(f(x)) = 0_E$ c'est-à-dire $f(x) \in \ker(g)$.
    Or, par définition de l'image, $f(x) \in \mathrm{Im}(f)$.
    Donc $f(x) \in \mathrm{Im}(f) \cap \ker(g)$. Or $\mathrm{Im}(f) \cap \ker(g) = \{0_E\}$ donc $f(x) = 0_E$. D'où $x \in \ker(f)$.
    Ainsi $\ker(g \circ f) \subset \ker(f)$.
  - On a donc :
    $$\ker(g \circ f) = \ker(f).$$

Exercice 6 :

1. (a) Soit $x \in \ker(u)$. On a $u(x) = 0$.
   On a donc : $v(u(x)) = v(0) = 0$ c'est-à-dire $w(x) = 0$ donc $x \in \ker(w)$.
   Or w est un isomorphisme donc w est injectif ainsi $\ker(w) = \{0\}$.
   Donc $x = 0$ et ainsi, $\ker(u) = \{0\}$.
   Donc : u est injectif.

   (b) Soit $y \in G$.
   Comme w est un isomorphisme, w est surjectif. Donc, il existe $z \in E$ tel que $y = w(z)$. Ainsi $y = v(u(z))$.
   Posons $x = u(z)$. On a $x \in F$ et $y = v(x)$.
   Donc : v est surjectif.

   (c)
   - Soit $y \in \mathrm{Im}(u) \cap \ker(v)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$ et $v(y) = 0$.
     Ainsi : $v(u(x)) = 0$ donc $w(x) = 0$.
     Or w est un isomorphisme donc w est injectif, donc $x = 0$.
     Ainsi : $\mathrm{Im}(u) \cap \ker(v) = \{0\}$.
   - Soit $x \in F$.

     > *On cherche à écrire x comme la somme d'un vecteur de Im(u) et d'un vecteur de* $\ker(v)$*, c'est-à-dire sous la forme $x = u(x_1) + x_2$ avec $x_2 \in \ker(v)$. Donc on cherche à avoir* $0 = v(x_2) = v(x - u(x_1))$*, c'est-à-dire $v(x) = v(u(x_1)) = w(x_1)$.*

     Comme w est un isomorphisme et $v(x) \in G$, il existe $x_1 \in E$ tel que $v(x) = w(x_1)$.
     Ainsi $v(x) = v(u(x_1))$ donc $v(x - u(x_1)) = 0$.
     Posons $x_2 = x - u(x_1)$, on a alors $x_2 \in \ker(v)$.
     De plus, $x = u(x_1) + x_2$ et comme $u(x_1) \in \mathrm{Im}(u)$, on a : $F = \mathrm{Im}(u) + \ker(v)$.
   - Ainsi :
     $$\mathrm{Im}(u) \oplus \ker(v) = F.$$

2. - Soit $x \in \ker w$. On a $w(x) = 0$ donc $v(u(x)) = 0$.
     Ainsi $u(x) \in \ker(v)$.
     Or, par définition, $u(x) \in \mathrm{Im}(u)$. Donc $u(x) \in \ker(v) \cap \mathrm{Im}(u)$.
     De plus, comme $\mathrm{Im}(u) \oplus \ker(v) = F$, on a $\ker(v) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0\}$.
     Donc $u(x) = 0$, c'est-à-dire $x \in \ker(u)$.
     De plus, u est injectif donc $\ker(u) = \{0\}$. Ainsi $x = 0$.
     On a donc $\ker w = \{0\}$ et donc w est injectif.
   - Soit $y \in G$.

     > *On veut montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $y = w(x) = v(u(x))$. On commence par montrer que y est de la forme $v(z)$ et on espère montrer ensuite que z est de la forme $u(x)$.*

     Comme v est surjectif, il existe $z \in F$ tel que $y = v(z)$.

> *On voudrait écrire $z = u(x)$, il faudrait avoir $z \in Im(u)$ ce qui n'est pas vrai car on n'a pas $F = Im(u)$. Ce qui se rapproche le plus de cette égalité est $F = Im(u) \oplus \ker(v)$. On va donc l'utiliser.*

Comme $F = \mathrm{Im}\,(u) \oplus \ker(v)$, il existe $z_1 \in \mathrm{Im}\,(u)$ et $z_2 \in \ker(v)$ tels que $z = z_1 + z_2$.
Ainsi, il existe $x \in E$ tel que $z_1 = u(x)$ et on a $v(z_2) = 0$.
On a donc : $y = v(z) = v(z_1) + v(z_2) = v(u(x)) + 0 = v \circ u(x) = w(x)$.
Ainsi w est surjectif.

- Donc w est bijectif et w est un isomorphisme.