## Révisions de rentrée 1

On considère la fonction suivante :

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{e^x-1}{e^x-x} \end{array}.$$

On notera $\mathcal{C}$ la courbe représentative de $f$.

1. On considère la fonction suivante :
$$g: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x-x-1 \end{array}.$$
   (a) Déterminer le signe de $g'$. En déduire les variations de $g$.
   (b) En déduire le signe de $g$.
2. On considère la fonction suivante :
$$h: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (2-x)e^x-1 \end{array}.$$
   (a) Etudier la fonction $h$ et dresser son tableau de variations.
   (b) Montrer que l'équation $h(x)=0$ admet une unique solution $\alpha>1$.
   (c) Préciser, en fonction de $x$, le signe de $h(x)$.
3. (a) Montrer que la fonction $f$ est bien définie sur $\mathbb{R}^+$.
   (b) Déterminer la limite en $+\infty$ de $f$.
   (c) Montrer que $f$ est dérivable et calculer sa dérivée.
   (d) Dresser le tableau de variations de $f$.
   (e) En utilisant la fonction $g$, déterminer, suivant les valeurs de $x\in\mathbb{R}^+$, la position relative de $\mathcal{C}$ par rapport à la droite d'équation $y=x$.
   (f) Tracer $\mathcal{C}$ ainsi que la droite d'équation $y=x$.
4. On pose : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n=\displaystyle\int_0^n (f(x)-1)\,dx$.
   (a) Déterminer une primitive de $f$. En déduire, pour tout $n\in\mathbb{N}$, une expression de $u_n$ en fonction de $n$.
   (b) Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

---

## Correction commentée

1. (a)
   - $g$ est une combinaison linéaire de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^+$ donc $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$.
   - Soit $x\in\mathbb{R}^+$, on a :
   $$g'(x)=e^x-1.$$
   Donc : $g'(x)>0$ si $x\in]0,+\infty[$ et $g'(0)=0$.
   - Ainsi $g$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

   ✎ *Il faut justifier rapidement la dérivabilité de g avant d'écrire $g'$.*

   ✎ *Il ne faut pas oublier de définir x avant d'écrire $g'(x)$.*

   ✎ *Il faut bien utiliser les inégalités strictes et larges. L'inégalité $g'>0$ est fausse ici car elle signifie que : $\forall x\in\mathbb{R}^+$, $g'(x)>0$, ce qui est faux pour $x=0$. L'inégalité $g'\geq 0$ est vraie mais ne donne que la croissance de g et pas sa stricte croissance.*
   *Il n'est pas nécessaire d'avoir $g'>0$ pour avoir $g$ strictement croissante, il suffit d'avoir $g'>0$ partout sauf en un nombre fini de points. Ici, on a seulement un point d'annulation de $g'$, on peut donc conclure sur la stricte croissance.*

   (b)
   $g$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et $g(0)=0$. Ainsi :
   $$\forall x\in]0,+\infty[,\ g(x)>0 \text{ et } g(0)=0.$$
2. (a)
   - $h$ est une combinaison linéaire de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^+$ donc $h$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$.

- Soit $x \in \mathbb{R}^+$, on a :
$$h'(x) = -e^x + (2-x)e^x = (1-x)e^x.$$
Donc : $h'(x)$ est du signe de $1-x$.
- On a $h(0) = 2-1 = 1$, $h(1) = e-1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$. Donc :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $h$ | $1$ | $\nearrow$ | $e-1$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

✎ *Seules les variations de h sont demandées mais, si le calcul ne pose pas de problème, il est préférable de calculer les valeurs et/ou limites apparaissant dans le tableau.*

✎ *Si on veut détailler davantage l'étude du signe de $h'$, on ne doit pas résoudre l'équation $h'(x) = 0$ mais une des inéquations $h'(x) \geq 0$ ou $h'(x) \leq 0$.*

(b)
- $h$ est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]1,+\infty[$ et $0 \in ]-\infty, e-1[ = ]\lim_{+\infty} h, h(1)[$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $\alpha \in ]1,+\infty[$ tel que $h(\alpha) = 0$.
- $h$ est strictement croissante sur $[0,1]$ et $h(0) = 1 > 0$. Donc : $\forall x \in [0,1]$, $h(x) > 0$. Ainsi $h$ ne s'annule pas sur $[0,1]$.
- Comme $[0,+\infty[$ est la réunion disjointe de $[0,1]$ et $]1,+\infty[$, alors $h$ s'annule exactement une fois sur $[0,+\infty[$ et cette annulation a lieu en $\alpha \in ]1,+\infty[$.

✎ *Pour utiliser le théorème des valeurs intermédiaires afin de prouver une existence et une unicité, il faut citer les hypothèses de continuité, de stricte monotonie et vérifier que la quantité est bien comprise entre deux valeurs ou limites (dans ce cas la borne doit être exclue).*

✎ *Pour montrer la non-annulation de h (ici, sur $[0,1]$), il ne faut pas utiliser le théorème des valeurs intermédiaires mais uniquement un argument de monotonie. Il n'y a donc pas d'hypothèse de continuité à citer.*

(c)

On a :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | | |
| $h$ | $1$ | $\nearrow$ | $e-1$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

Donc :
$$\forall x \in [0,\alpha[,\ h(x) > 0, \quad h(\alpha) = 0, \quad \forall x \in ]\alpha,+\infty[,\ h(x) < 0.$$

✎ *Ici, une lecture du tableau de variations suffit.*

3. (a)

Soit $x \in \mathbb{R}^+$, on a $g(x) \geq 0$ donc $e^x - x \geq 1$. Ainsi $e^x - x \neq 0$.
Donc $f$ est définie sur $\mathbb{R}^+$.

✎ *On ne doit pas écrire $f(x)$ pour montrer que $f(x)$ est bien défini.*

(b)

Soit $x \in [0,+\infty[$,
$$f(x) = \frac{e^x(1-e^{-x})}{e^x(1-xe^{-x})} = \frac{1-e^{-x}}{1-xe^{-x}}.$$
Or, par croissances comparées : $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$ donc :
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1.$$

✎ *$f(x)$ dépend de x donc on doit définir $x$.*

✎ *$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ne dépend pas de x, il est donc inutile de définir x, par contre il faut prouver que la limite existe bien. Ici la preuve est faite en levant l'indétermination.*

✎ *Pour lever une indétermination de la forme $\frac{\infty}{\infty}$, on peut factoriser par le terme dominant, ici $e^x$.*

(c)

- $f$ est le quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas donc $f$ est dérivable.
- Soit $x \in \mathbb{R}^+$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x(e^x - x) - (e^x - 1)(e^x - 1)}{(e^x - x)^2} \\ &= \frac{e^{2x} - xe^x - (e^{2x} - 2e^x + 1)}{(e^x - x)^2} \\ &= \frac{(2 - x)e^x - 1}{(e^x - x)^2} \\ &= \frac{h(x)}{(e^x - x)^2}. \end{aligned}$$

✎ *Il s'agit d'une dérivée d'une fonction de la forme* $\frac{u}{v}$ *mais il est inutile d'introduire les fonctions* $u$ *et* $v$*. Les calculs de dérivées doivent être efficaces.*

(d)

D'après la question précédente, $f'$ est du signe de $h$, on a donc :

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | $0$ | $\nearrow$ | | $\searrow$ | $1$ |

✎ *On ne connaît pas la valeur de* $\alpha$ *ni celle de* $f(\alpha)$*.*

(e)

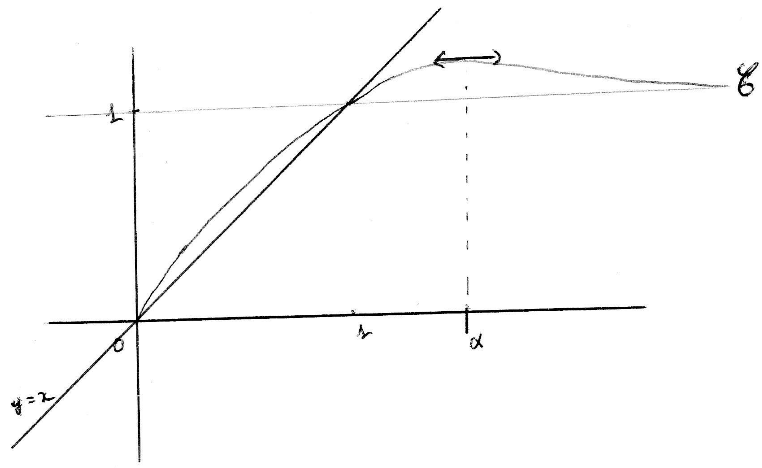
Soit $x \in \mathbb{R}^+$,

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \frac{e^x - 1}{e^x - x} - x \\ &= \frac{e^x - 1 - x(e^x - x)}{e^x - x} \\ &= \frac{(1 - x)e^x - 1 + x^2}{e^x - x} \\ &= \frac{(1 - x)e^x - (1 - x)(1 + x)}{e^x - x} \\ &= \frac{(1 - x)(e^x - (1 + x))}{e^x - x} \\ &= \frac{(1 - x)g(x)}{e^x - x} \end{aligned}$$

Or $e^x - x > 0$ et $g(x) \geq 0$ donc $f(x) - x$ est du signe de $1 - x$.
Ainsi, sur $[1, +\infty[$, $\mathcal{C}$ est en dessous de la droite d'équation $y = x$ et sur $[0, 1]$, $\mathcal{C}$ est au dessus de la droite d'équation $y = x$.

✎ *Lorsqu'on cherche un signe, il faut toujours chercher à factoriser la quantité étudiée.*

(f)




✎ *Les valeurs de $\alpha$ et $f(\alpha)$ ne sont pas connues, elles sont placées de façon à être cohérentes. On doit bien respecter la valeur en 0, la tangente horizontale, la limite en $+\infty$, la monotonie ainsi que la position relative par rapport à la droite $y = x$. Il ne faut pas rajouter de valeur supplémentaire et il faut savoir faire ce tracé sans l'aide de la calculatrice.*

4. (a)
   - Posons $u : x \mapsto e^x - x$. $u$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}^+$ et $f = \frac{u'}{u}$. Donc $x \mapsto \ln(u(x))$ est une primitive de $f$, c'est-à-dire :
   $$x \mapsto \ln(e^x - x).$$
   - Soit $n \in \mathbb{N}$,
   $$\begin{aligned} u_n &= \int_0^n f(x)\,dx - \int_0^n 1\,dx \\ &= \left[\ln(e^x - x)\right]_0^n - n \\ &= \ln(e^n - n) - \ln(1) - n. \end{aligned}$$

   Donc :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \ln(e^n - n) - n.$$

✎ *Une primitive est une fonction, il faut donc bien utiliser une notation fonctionnelle. On peut donc écrire $x \mapsto \ln(e^x - x)$ est une primitive de $f$ mais pas $\ln(e^x - x)$ est une primitive de $f$.*

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_n &= \ln(e^n(1 - ne^{-n})) - n \\ &= \ln(e^n) + \ln(1 - ne^{-n}) - n \\ &= n + \ln(1 - ne^{-n}) - n \\ &= \ln(1 - ne^{-n}) \end{aligned}$$

Or, par croissances comparées, $\lim\limits_{n \to +\infty} ne^{-n} = 0$ donc :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \ln(1) = 0.$$