Révisions de calcul intégral

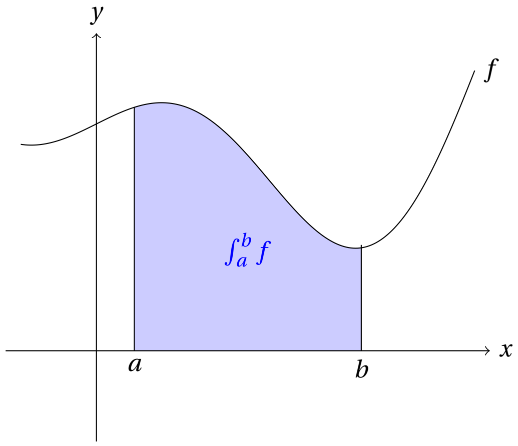
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$.

I Introduction de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment

1.1 Cas des fonctions positives

Soit f une fonction continue et positive sur le segment $[a,b]$. On définit l'intégrale de f sur $[a,b]$ comme étant l'aire située sous la courbe représentative de f. On la note :

$$\int_a^b f \text{ ou } \int_a^b f(x)\,dx.$$



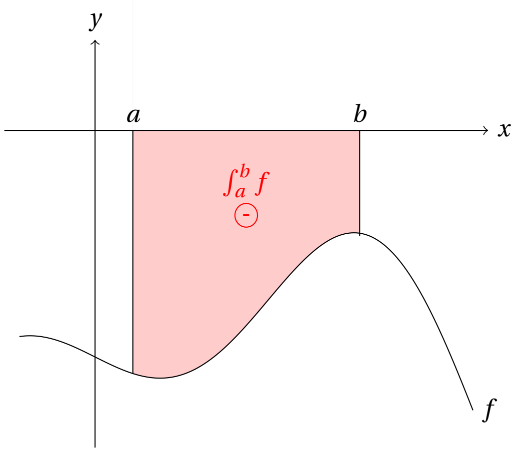
Remarque : Dans l'écriture $\int_a^b f(x)\,dx$ la variable x est muette, on a donc, par exemple :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt.$$

La notation "dx" n'est pas définie mathématiquement, on ne l'utilisera que pour indiquer, si besoin, le nom de la variable d'intégration.

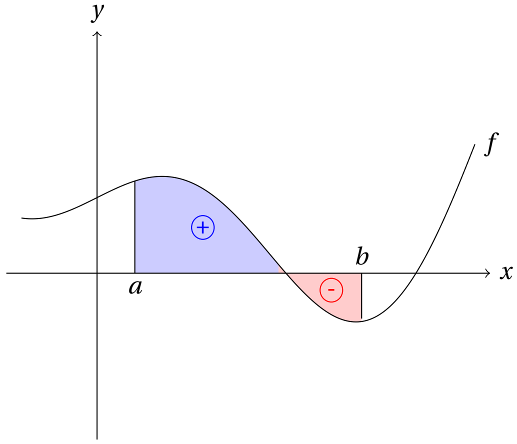
1.2 Cas des fonctions de signe quelconque

- Soit f une fonction continue est négative sur le segment $[a,b]$. Comme $-f$ est positive, il semble naturel de définir l'intégrale de f en utilisant à nouveau une aire. Afin de prendre en compte le signe de f, l'intégrale de f sur $[a,b]$ est définie comme étant l'opposé de l'aire située entre sa courbe représentative et l'axe des abscisses. On introduit donc la notion d'aire munie d'un signe qu'on appelle aire algébrique.



- Soit f une fonction continue sur le segment $[a,b]$. On définit l'intégrale de f sur $[a,b]$ comme étant l'aire algébrique située entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses. On la note :

$$\int_a^b f \text{ ou } \int_a^b f(x)\,dx.$$



Remarque :

- Si $a = b$, l'aire considérée est nulle, on a donc, pour une fonction f continue quelconque :

$$\int_a^a f = 0.$$

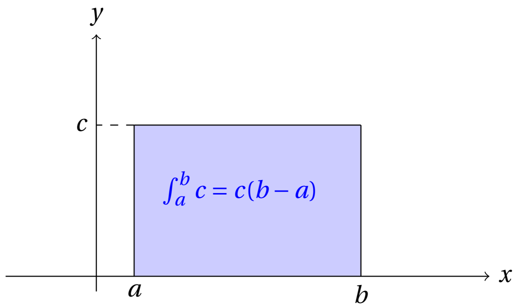
- En considérant les aires algébriques, on a :

$$\int_b^a f = -\int_a^b f.$$

On peut donc adapter les résultats au cas où on n'a pas l'hypothèse $a \leq b$.

1.3 Cas particulier d'une fonction constante

Soit $c \in \mathbb{R}$. L'intégrale de la fonction constante égale à c sur $[a,b]$ est l'aire algébrique du rectangle de base $[a,b]$ qui a pour longueur $b-a$ et de hauteur c :



On a donc le résultat suivant :

Proposition 1

Soit $c \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^b c = c(b-a).$$

II Propriétés de l'intégrale

Les propriétés suivantes découlent des propriétés géométriques des aires.

Proposition 2 : Linéarité de l'intégrale

Soient f, g des fonctions continues sur $[a, b]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$$

Proposition 3 : Positivité de l'intégrale

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.

Si $f \geq 0$ sur $[a, b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f \geq 0$.

Proposition 4 : Croissance de l'intégrale

Soient f, g des fonctions continues sur $[a, b]$.

Si $f \leq g$ sur $[a, b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

Remarque : Ce résultat signifie qu'on peut intégrer des inégalités. Il ne faut pas oublier que l'inégalité intégrée doit être vraie sur $[a, b]$ et qu'on doit avoir $a \geq b$.

Proposition 5 : Inégalité triangulaire intégrale

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|.$$

Preuve. On a : $-|f| \leq f \leq |f|$, donc, par croissance de l'intégrale :

$$-\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|.$$

Ainsi, par propriété de la valeur absolue :

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|.$$

□

Proposition 6 : Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et soit $c \in]a, b[$. Alors

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Remarque : La relation de Chasles permet de "découper" une intégrale.

III Intégration et primitives

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide, non réduit à un point.

3.1 Rappels sur les primitives

Définition 1

Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$. On appelle primitive de f sur I toute fonction F dérivable sur I et telle que $F' = f$.

Proposition 7

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Si F est une primitive de f sur I alors l'ensemble des primitives de f sur I est

$$\{F + C, C \in \mathbb{K}\}.$$

C'est à dire qu'une fonction G est une primitive de f sur I si et seulement si il existe $C \in \mathbb{K}$ tel que :

$$\forall x \in I,\ G(x) = F(x) + C.$$

Remarque : Il n'y a donc pas d'unicité de la primitive mais, sur un intervalle, les primitives sont égales à une constante près.

3.2 Intégrale et primitives

Proposition 8 (Théorème fondamental de l'analyse)

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $a \in I$.

La fonction $\begin{array}{rccl} F: & I & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)dt \end{array}$ est l'unique primitive de f s'annulant en a.

Remarque : Il faut bien choisir un nom pour la variable d'intégration qui ne soit pas celui de la variable de la fonction F, c'est pourquoi on a appelé t la variable d'intégration et pas x.

Corollaire 1

Toute fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ admet des primitives sur I.

Corollaire 2

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $a \in I$.
Alors f admet une unique primitive F telle que $F(a) = 0$, c'est-à-dire qui s'annule en a et on a : $\begin{array}{rccl} F: & I & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)dt. \end{array}$.

Proposition 9

Si f est une fonction continue sur I et F une primitive de f sur I alors :

$$\forall a, b \in I,\ \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

On note :

$$\forall a, b \in I,\ \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) = [F(t)]_a^b.$$

Les formules suivantes découlent des formules de dérivation :

Formule 1

Soit u une fonction dérivable.

Fonction $f : x \mapsto$	Primitive $F : x \mapsto$	u à valeurs dans
$u'.u^n$, $n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$u'.u^n$, $n \in \mathbb{Z}^- \setminus \{-1\}$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}^*$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln u$	$\mathbb{R}^{+*}$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$\mathbb{R}^{+*}$
$u'.e^u$	e^u	$\mathbb{R}$
$u'.\cos u$	$\sin u$	$\mathbb{R}$
$u'.\sin u$	$-\cos u$	$\mathbb{R}$

IV Exemples de calculs d'intégrales

4.1 Exemples corrigés

- $I_1 = \displaystyle\int_1^2 \frac{1+\ln(x)}{x}\,dx$:
  $x \mapsto \frac{1+\ln(x)}{x}$ est de la forme $u'.u$ avec $u : x \mapsto 1+\ln(x)$. Comme $u'u$ a pour primitive $\frac{1}{2}u^2$, on a donc :
$$I_1 = \left[\frac{1}{2}(1+\ln(x))^2\right]_1^2 = \frac{1}{2}(1+\ln(2))^2 - \frac{1}{2}(1+\ln(1))^2 = \frac{1}{2}(1+\ln(2))^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\ln(2)\,(\ln(2)+2)\,.$$

- $I_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\cos(x) - 2\sin(x))\,dx$:
  Par linéarité de l'intégrale :
$$I_2 = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,dx - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\,dx = 3\,[\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\,[-\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 3(1-0) - 2(0+1) = 1.$$

- $I_3 = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x+1}{x^2+2x+3}\,dx$:
  $x \mapsto \frac{x+1}{x^2+2x+3}$ est de la forme $\frac{1}{2}\frac{u'}{u}$ avec $u : x \mapsto x^2+2x+3$. Comme $\frac{1}{2}\frac{u'}{u}$ a pour primitive $\frac{1}{2}\ln u$, on a donc :
$$I_3 = \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3)\right]_{-1}^1 = \frac{1}{2}\ln(6) - \frac{1}{2}\ln(2) = \frac{1}{2}\ln(3).$$

- $I_4 = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1+2e^x}\,dx$:
  $x \mapsto \frac{e^x}{1+2e^x}$ est de la forme $\frac{1}{2}\frac{u'}{u}$ avec $u : x \mapsto 1+2e^x$. Comme $\frac{1}{2}\frac{u'}{u}$ a pour primitive $\frac{1}{2}\ln u$, on a donc :
$$I_4 = \left[\frac{1}{2}\ln(1+2e^x)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln(1+2e) - \frac{1}{2}\ln(3) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+2e}{3}.$$

- $I_5 = \displaystyle\int_{-1}^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}\,dx$:
  $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}$ est de la forme $\frac{1}{2}\frac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u : x \mapsto x^2+5$. Comme $\frac{1}{2}\frac{u'}{\sqrt{u}}$ a pour primitive $\sqrt{u}$, on a donc :
$$I_5 = \left[\sqrt{x^2+5}\right]_{-1}^2 = \sqrt{9} - \sqrt{6} = 3 - \sqrt{6}.$$

- $I_6 = \displaystyle\int_1^2 \frac{6-4x}{(x^2-3x-4)^5}\,dx$:
  $x \mapsto \frac{6-4x}{(x^2-3x-4)^5}$ est de la forme $-2u'.u^{-5}$ avec $u : x \mapsto x^2-3x-4$. Comme $-2u'.u^{-5}$ a pour primitive $-2.\frac{u^{-4}}{-4} = \frac{1}{2u^4}$, on a donc :
  $$I_6 = \left[\frac{1}{2(x^2-3x-4)^4}\right]_1^2 = \frac{1}{2.6^4} - \frac{1}{2.6^4} = 0.$$

- $I_7 = \displaystyle\int_0^{\pi/3} \sin(3x)\cos^3(3x)\,dx$:
  $x \mapsto \sin(3x)\cos^3(3x)$ est de la forme $-\frac{1}{3}u'.u^3$ avec $u : x \mapsto \cos(3x)$. Comme $-\frac{1}{3}u'.u^3$ a pour primitive $-\frac{1}{3}.\frac{1}{4}u^4 = -\frac{1}{12}u^4$, on a donc :
  $$I_7 = \left[-\frac{1}{12}\cos^4(3x)\right]_0^{\pi/3} = -\frac{1}{12} + \frac{1}{12} = 0.$$

- $I_8 = \displaystyle\int_{-1}^0 xe^{-x^2+1}\,dx$:
  $x \mapsto xe^{-x^2+1}$ est de la forme $-\frac{1}{2}u'.e^u$ avec $u : x \mapsto -x^2+1$. Comme $-\frac{1}{2}u'.e^u$ a pour primitive $-\frac{1}{2}e^u$, on a donc :
  $$I_8 = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2+1}\right]_{-1}^0 = -\frac{1}{2}e + \frac{1}{2} = \frac{1-e}{2}.$$

4.2 Exemples à traiter

- $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{3}{\sqrt{x+1}} + 2e^{-x}\right)dx$ .... $= 6\sqrt{2} - 4 - \dfrac{2}{e}$
- $I_2 = \displaystyle\int_{-1}^1 (x-1)(x^2-2x+2)\,dx$ .... $= -6$
- $I_3 = \displaystyle\int_3^4 \frac{6x-3}{(x^2-x)^3}\,dx$ .... $= \dfrac{1}{32}$
- $I_4 = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx$ .... $= \ln\left(\dfrac{e^2+1}{2e}\right)$
- $I_5 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1-\sin x}{x+1+\cos x}\,dx$ .... $= \ln\left(\dfrac{\pi+2}{4}\right)$
- $I_6 = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\,dx$ .... $= 2\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$
- $I_7 = \displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{x+\cos(2x)}{(x^2+\sin(2x))^3}\,dx$ .... $= \dfrac{15}{4\pi^4}$
- $I_8 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}}\,dx$ .... $= \ln\left(\dfrac{1+e}{2}\right)$